Russian Academy of Sciences
Institute of Philosophy
Institute of Logic, Cognitive Science
and Development of Personality

PROCEEDINGS OF THE RESEARCH LOGICAL SEMINAR OF INSTITUTE OF PHILOSOPHY RUSSIAN ACADEMY OF SCIENCES

1996

Moscow
1997

Российская Академия Наук
Институт философии
Общественный институт логики,
когнитологии и развития личности

ТРУДЫ НАУЧНО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКОГО СЕМИНАРА ЛОГИЧЕСКОГО ЦЕНТРА ИНСТИТУТА ФИЛОСОФИИ РАН 1996

Москва
1997

ББК 87.4
Т 78

Т-78 **Труды научно-исследовательского семинара Логического центра Института философии РАН 1996. - М., 1997. - 205 с.**

Статьи сборника основаны на докладах, сделанных на семинарах в текущем году. Основное внимание авторов сосредоточено на актуальных проблемах неклассических логик, как на семантическом, так и синтаксическом уровне. В статьях содержатся нестандартные формулировки логических систем и предлагаются оригинальные методологические решения, касающиеся формализованных языков и основанных на них теорий.

Сборник представляет интерес для специалистов в области логики и ее приложений в различных научных дисциплинах.

ISBN 5-201-01952-8

СОДЕРЖАНИЕ

Предисловие 7

Смирнова Е.Д. К вопросу построения семантик формализованных и естественных языков 9

Сидоренко Е.А. Семантика следования (для системы E) ... 33

Карпенко А.С., Шалак В.И. Минимальные модели для нечеткой алгебры типа 2 56

Васюков В.Л. Метафора в прагматических матрицах 64

Карпенко А.С., Попов В.М. Новая аксиоматизация импликативного фрагмента бесконечнозначной логики Лукасевича $Ł_\omega$ 71

Павлов С.А. Трехзначная логика Лукасевича и логика ложности 76

Болотов А.Е., Бочаров В.А., Горчаков А.Е. Алгоритмы поиска вывода в классической пропозициональной логике 92

Горемыкина Г.И. Интуиционистские варианты классических теорем 102

Герасимова И.А. Логический статус отрицания в деонтических ситуациях 126

Ивлев Ю.В. К теории логических модальностей 140

Сидоренко Е.А. П.Флоренский о совместимости логической противоречивости Священного писания с божественным его происхождением 149

Гриненко Г.В. Логико-семиотический анализ гимнов Авесты 157

Анисов А.М. Тезис Джемса и логика 178

Васюков В.Л. О феноменологической силлогистике 190

Карпенко А.С. Библиотечно-библиографическая классификация литературы по логике 201

CONTENTS

Preface		7
Smirnova E.D.	On the Constructing of Formal Language Semantic	9
Sidorenko E.A.	Semantic of Entailment (for the system E)	33
Karpenko A.S., Shalak V.I.	Minimal Models For Fuzzy Algebras of Type 2	56
Vasyukov V.L.	Metaphora in Pragmatic Matrices	64
Karpenko A.S., Popov V.M.	New Axiomatization of an Implicative Fragment of Łukasiewicz's Infinite-valued Logic $Ł_\omega$	71
Pavlov S.A.	Łukasiewicz's Three-valued Logic and Falsehood Logic	76
Bolotov A.E., Bocharov V.A., Gorchakov A.E.	Inference-Searching Algorythms in Classical Propositional Logic	92
Goremykina G.I.	Intuitionistic Versions of Classical Theorems	102
Gerasimova I.A.	Logical Status of Negation in Deontic Situations	126
Ivlev Yu.V.	On Theory of Logical Modalities	140
Sidorenko E.A.	P.Florensky on Compatibility of Logical Inconsistency of Holy Writ with Its Divine Origin	149
Grinenko G.V.	Logical and Semiotical Analysis of Avestian Hymns	157
Anisov A.M.	James' Thesis and Logic	178
Vasyukov V.L.	On Phenomenological Syllogistic	190
Karpenko A.S.	Library-Bibliographical Literature Classification on Logics	201

Предисловие

Эта книга является одиннадцатым выпуском периодического издания Трудов научно-исследовательского семинара по логике Института философии РАН. Серия издается в ИФРАН. Постоянно действующий семинар по логике организован в начале 60-х годов профессором Владимиром Александровичем Смирновым, который вплоть до 1996 года был его бессменным руководителем. Семинар действует на базе сектора логики Института философии и объединяет специалистов разных логических направлений из ведущих научных и образовательных учреждений Москвы.

Настоящая книга содержит работы, сделанные на основе обсужденных в 1994-1995гг. докладов. Ряд работ посвящен фундаментальным проблемам логической семантики. Проведен тщательный анализ теории семантических категорий и ее основного принципа, выявлена роль основного принципа при построении семантик формализованных языков, базирующихся на различных иерархиях семантических категорий (Е.Д.Смирнова). Развиваются идеи построения реляционной релевантной семантики с бинарным отношением достижимости. Философское обоснование предложенного метода вносит новые уточнения в представления о логическом следовании (Е.А.Сидоренко).

Продолжают развиваться семантические исследования неклассических логик. Описаны типы нормативных рассуждений в актах индивидуализации общих норм, в результате чего выявлены основные виды отрицаний, влияющие на логическое заключение (И.А.Герасимова). Многоаспектная концепция логических модальностей обсуждается в работе Ю.В.Ивлева.

Логическая реконструкция философских и религиозных текстов - традиционная для логической науки сфера интересов. Анализ идей о. П.Флоренского о совместимости логической противоречивости Священного писания с Божественным его происхождением в свете принципов и методов релевантной логики несомненно привлечет внимание не только логиков, но и историков философии (Е.А.Сидоренко). Предложенный Г.В.Гриненко оригинальный метод логико-семиотического анализа коммуникативных актов в гимнах Авесты, возможно, заинтересует историков и лингвистов.

Новые результаты получены в теории моделей: разработаны минимальные модели для нечеткой алгебры типа 2 (А.С.Карпенко. В.И.Шалак). Предложены оригинальные синтаксические конструкции многозначных логик (А.С.Карпенко. В.М.Попов, С.А.Павлов). С позиций неклассических логик обсуждаются проблемы формальной феноменологии и теории метафоры (В.А.Васюков) и неопределенности (А.М.Анисов).

В книге приведена библиотечно-библиографическая классификация литературы по логике, проделанная для Российской Государственной библиотеки А.С.Карпенко и обсужденная на научно-исследовательском семинаре.

Статьи сборника содержат оригинальные результаты, ставят новые проблемы, выявляют дискуссионные вопросы в области неклассических логик и их приложений. Книга ориентирована на специалистов в области логики, методологии науки, и, видимо, должна заинтересовать эпистемологов и историков философии.

Е.Д.Смирнова

К вопросу построения семантик формализованных и естественных языков (Роль основного принципа теории семантических категорий)*

В статье рассматриваются условия построения семантик формализованных языков на базе теории семантических категорий, исследуется роль основного принципа этой теории.

Согласно А.Тарскому, семантика как строгая наука может быть построена только для языков с точно заданной структурой. В таких языках принадлежность к классу термов, формул (предложений), аксиом, выводов устанавливается эффективным образом. Примером такого рода языков являются формализованные языки. В этом случае имеются процедуры, позволяющие выделять эффективным образом указанные классы выражений только по виду символов и способам их сочленения, не прибегая к их смыслу и значению. Такое описание языка является чисто формальным и относится к синтаксису.

Следует различать задачу выявления логической формы высказываний и ее репрезентации в знаковой форме и вопросы формализации. Для того, чтобы освободиться от «материи» суждения, вводятся соответствующего типа переменные. Таким путем получаем, например, репрезентацию логической формы в силлогистике. Однако языки силлогистики не являются формализованными, хотя логическая форма представлена в них в знаковой форме адекватным образом. В записи: *SaP*, *SeP* и т.д. фиксируются вполне определенные содержательные, семантические отношения в сфере объемов понятий *S* и *P*. И именно апеллируя к свойствам этих отношений мы обосновываем правильные рассуждения в силлогистике.

В случае же выводов в формализованных языках мы обращаемся лишь к видам знаков и их комбинаций. Но смысл построения такого рода языков не сводится к отвлечению от всякого содержания и обращению только к знаковым комби-

* Работа выполнена при поддержке фонда РГНФ, грант № 96-03-04205.

нациям. Главное — вопрос эффективности. В случае формализованных языков речь идет о языках, построенных как исчисления.

Существуют разные пути уточнения понятия механической, эффективной процедуры. Понятие эффективной операции может быть уточнено, например, в терминах машины Тьюринга или нормального алгоритма Маркова. Интересно, что понятия формальной системы и эффективной операции внутренне связаны и одно может быть определено через другое. Выразимость в языке, в формальной системе определенного стандартного типа свойств, отношений, операций служит показателем эффективности. Так, если предикат (класс) R рекурсивно определим (Т-определим) в первопорядковой арифметике P (где Т — класс теорем системы), то он разрешим (рекурсивен), а если предикат (класс) рекурсивно перечислим, то он семантически определим (Tr-определим) в P. Любой рекурсивный предикат Т-определим в P [5[, [6].

Фактически реализуется своеобразная идея, высказанная еще Э.Кондильяком: язык — не только средство общения, но и аналитический метод. «Если бы люди заметили, что языки также являются аналитическими методами, было бы нетрудно найти правила искусства рассуждать» [1, с. 240]. Этот подход к языку как инструменту познавательной деятельности в дальнейшем активно реализуется Г.Лейбницем и особенно Г.Фреге. Искусственные, формализованные языки вовсе не противопоставляются при этом естественным языкам, у них задачи разные.

Каковы же пути и способы интерпретации формальных систем, построения адекватных семантик? Как отмечал А.Тарский, именно семантические понятия пользовались «дурной славой» и введение их точным, корректным образом — основная задача. Далее, важно выяснить, каков должен быть метаязык, его концептуальный аппарат, средства метатеории, адекватные для построения семантики объектной теории.

Как нам представляется, построение семантики формальной системы предполагает принятие определенной типологии смыслов — категорий значения. Выражениям определенного типа, структуры, сопоставляются определенные виды значений. Семантические правила интерпретации реализуют такое сопоставление. Типология символов, задаваемая на уровне правил образования, представляет собой формальное разграничение выражений языка по чисто синтаксическим признакам и принадлежит синтаксису.

Построение семантики того или иного языка базируется на (явном или неявном) принятии системы семантических категорий. Разработка иерархии семантических категорий, т.е. определенной типологии значений, определяется предпосылками скорее философского, теоретико-познавательного характера, а не соображениями прагматического толка. Именно система семантических категорий определяет, на наш взгляд, то, что называют «миром языка», его онтологией. Таким образом, принимаемая система семантических категорий является важной характеристикой формализованных языков.

Иерархия семантических категорий, положенная в основу формализованного языка, обуславливает способ анализа логической формы выражений этого языка и тем самым допустимые способы рассуждения. Так, язык стандартной логики (систем фреге-расселовского типа) и язык сист мы онтологии Лесневского отличаются прежде всего тем, что в их основе лежат разные системы семантических категорий. В качестве основных категорий в языках фреге-расселовского типа выступают собственные имена (имена предметов индивидной области) и высказывания. Общие имена, типа «металл», «человек», «электропроводное вещество» и т.д. , относятся не к категории имен, а к категории s/n, т.е. рассматриваются как одноместные предикаты. В силу этого в языках фреге-расселовского типа субъект и предикат высказывания *не могут принадлежать к одной и той же семантической категории*, в то время как в силлогистике и онтологии Лесневского — могут. По существу меняется само понятие предиката.

Построение теории семантических категорий становится базой для разработки определенной типологии самих языков. Языки, во-первых, могут различаться исходными категориями и способами конструирования производных. Далее, они могут отличаться тем, как соотносятся синтаксические и семантические категории — иными словами тем, какие категории выражений расцениваются как значащие, а какие — как неполные символы, синкатегорематические выражения. Наконец, языки могут различаться по числу и порядку категорий значения (классификация Тарского).

Определенные трудности, с которыми мы сталкиваемся при построении семантик для формализованных языков различной структуры, прежде всего связаны с многообразием и типом семантических категорий, к которым принадлежат выражения этих языков. Они зависят от того, принадлежат ли выражения и (квантифицируемые) переменные языка к конечному или бесконечному числу семантических категорий. В последнем случае существенно, ограничен ли сверху порядок этих семантических категорий.

Подробнее относительно классификации языков по методу Тарского см. [2, гл. II, § 4]. Тарский предлагает разграничивать языки в зависимости от того, к каким семантическим категориям принадлежат встречающиеся в этих языках переменные. Соответственно, выделяются четыре типа языков:

1. языки, в которых все переменные относятся к одной семантической категории (напр., язык исчисления классов, рассмотренный Тарским [7, § 2-3], или язык исчисления высказываний с кванторами по пропозициональным переменным);

2. языки, в которых число категорий, к которым принадлежат переменные, больше 1, но конечно (напр., одноместное исчисление предикатов с кванторами по предикатным переменным);

3. языки, в которых переменные принадлежат к бесконечному числу различных семантических категорий, но порядок этих категорий конечен, т.е. не превосходит некоторое данное число *n* (напр., исчисление предикатов 2-го порядка):

4. языки, содержащие переменные сколь угодно высокого порядка (напр., язык простой теории типов).

Языки первых трех типов Тарский называет языками конечного порядка в противоположность языкам четвертого типа — языкам бесконечного порядка.

Разработанный Тарским метод определения понятия истинного высказывания для языка исчисления классов [7, § 3] полностью может быть применен к любым языкам первого типа.

Серьезные трудности возникают тогда, когда мы переходим к языкам более сложной структуры, т.е. к языкам 2-го, и 3-го и особенно 4-го типов. Объектом нашего рассмотрения фактически выступают *средства, концептуальный аппарат метатеории, в которой строится определение понятия истинного высказывания объектного языка.*

Согласно основному принципу теории семантических категорий, каждое выражение языка принадлежит к одной и только одной семантической категории. По определению два выражения относятся к одной и той же семантической категории, если 1) имеется пропозициональная функция (высказывание), содержащая одно из этих выражений и, если 2) пропозициональная функция (высказывание), содержащая одно из этих выражений, не теряет характера пропозициональной функции (высказывания) в случае замены одного содержащегося в ней выражения на другое.

Принимается, что для того, чтобы два выражения принадлежали к одной семантической категории, достаточно, чтобы имелась хотя бы одна пропозициональная функция (высказывание), которая содержала одно из этих выражений и оставалась бы пропозициональной функцией (высказыванием) после замены этого выражения на другое. Этот принцип называют *основным принципом теории семантических категорий* и он кладется в основу построения формализованных языков и их семантик. Таким образом, категория значения (семантическая категория) выражения в такого рода языках остается контекстно независимой. И два выражения, принадлежащие к различным семантическим категориям, выступают как два различных выражения языка.

При построении семантики и введении таких семантических понятий как выполнимость и, соответственно, истинность возникает проблема *неоднозначности вводимых понятий*. Уже в случае языков 1-го типа, рассматривая понятие выполнимости пропозициональной формулы одним, двумя, тремя и т.д. объектами — в зависимости от числа попарно различных переменных, входящих в формулу, Тарский отмечает, что такое понятие выполнимости является семантически неоднозначным: оно охватывает отношения с различным числом аргументных мест, а такого рода отношения (точнее, соответствующие им языковые выражения) заведомо принадлежат к различным семантическим категориям.

Однако добиться семантической однозначности термина выполнимости для языков 1-го типа не представляет никакой принципиальной трудности. Именно с этой целью Тарский вводит понятие последовательности индивидов, поскольку все такого рода последовательности принадлежат к одной и той же семантической категории. Напомним, что бесконечная последовательность определялась как бинарное (однозначное) отношение, областью которого является множество объектов рассмотрения, а противообластью — класс целых положительных чисел. Аналогично термин «конечная n-членная последовательность» означает бинарное (однозначное) отношение, противообласть которого состоит из всех натуральных чисел k таких, что $1 \leq k \leq n$. Отсюда не существует последовательностей (в отличие от упорядоченных n-ок) объектов, члены которых принадлежали бы к различным семантическим категориям. Бинарные отношения принадлежат к одной и той же семантической категории, если и только если их области принадлежат к одной и той же категории и их противообласти также принадлежат к одной и той же семантической категории. Таким образом, все последовательности объектов одной категории, независимо от числа их членов, принадлежат к одной и той же семантической категории (опять-таки в отличие от упорядоченных n-ок). Иными словами, последовательности принадлежат к одной и той же семантической категории, если и только если члены этих последовательностей принадлежат к одной и той же семантической категории. Тарский определяет понятие «последовательность объектов f выполняет формулу α" — Вып(f,a), представляющее собой бинарное отношение, и достигает семантической однозначности понятия выполнимости. Трудности возникают, когда мы переходим к языкам более сложной структуры, т.е. к языкам 2-го, 3-го и особенно 4-го типов.

Столь скрупулезный анализ вводимых метапонятий связан с задачей исследования категориальной структуры метаязыка, а это в свою очередь дает путь к оценке выразительных возможностей языка, к выявлению тех средств, которые необходимы для построения семантики соответствующего объектного языка.

Однако уже в языках 2-го типа переменные принадлежат более чем к одной семантической категории, хотя число категорий конечно. В такого рода языках семантическая категория предиката выполнимости зависит не только от числа мест этого предиката, но и от семантических категорий переменных, входящих в пропозициональные формулы языка. Вообще говоря, семантическая категория любого предиката зависит не только от числа его аргументных мест, но и от семантических категорий его аргументов. Точно так же обстоит дело с семантической категорией предиката выполнимости. Так, если язык содержит два вида переменных, принадлежащих к двум различным семантическим категориям, то приходится, соответственно, рассматривать по меньшей мере два вида последовательностей, принадлежащих к двум различным семантическим категориям.

В качестве примера такого рода языка Тарский рассматривает логику бинарных отношений с кванторами по индивидным и по предикатным переменным.

Пусть x_I, x_{II}, x_{III}, ... бесконечный перечень индивидных переменных, т.е. , переменных 1-го порядка.

R_1, R_2, R_3, ... — переменные 2-го порядка. Элементарной пропозициональной формулой является выражение вида Xyz, где вместо X выступает любая переменная 2-го порядка, а вместо y и z — любые переменные 1-го порядка. Символом «v_k» обозначим k-ую переменную первого вида, а символом «V_k» — k-ую переменную 2-го порядка. Посредством $\rho_{k,l,m}$ обозначим элементарную формулу так, что $\rho_{k,l,m} = ((V_k \frown v_l) \frown v_m)$.

Между свободными переменными формул и объектами их выполняющими имеет место строгое семантическое соответствие: каждая свободная переменная принадлежит к той же семантической категории, что и имена объектов, ей приписываемых. Если формула содержит свободные переменные 2-х различных семантических категорий, то при определении выполнимости мы должны оперировать с последовательностями, члены которых принадлежат к соответствующим 2-м различным категориям.

Для любых языков с *конечным* числом семантических категорий в принципе не сложно несколько модифицировать метод, примененный к языкам 1-го типа [7, § 3], таким образом, чтобы понятие выполнимости (а затем, соответственно, и понятие истинного высказывания) имело семантически однозначный характер.

Тарский предлагает два способа такой модификации.

1. метод многострочных последовательностей и

2. метод унификации (объединения) переменных,

Для языка логики бинарных отношений первый метод состоит в том, что понятие выполнимости рассматривается как трехчленное отношение — Вып(f,F,a), где f — последовательность индивидов, F — последовательность бинарных отношений, a — формула рассматриваемого языка. Соответственно, f_k

— k-й член последовательности индивидов, а F_k — k-ый член последовательности бинарных отношений. Мы говорим, что *последовательности f и F совместно выполняют формулу* $\rho_{k,l,m}$, если и только если между индивидами f_l и f_m имеет место отношение F_k. Можно трактовать понятие выполнимости и как бинарное отношение между *двустрочными последовательностями* и формулами. Под двустрочной последовательностью f имеется в виду отношение, которое каждому натуральному числу однозначно ставит в соответствие упорядоченную пару $<f,F>$, состоящую из последовательности индивидов и последовательности бинарных отношений. Переменной вида v_k сопоставляется k-ый член первой строки последовательности $\psi^1{}_k = f_k$, а переменной вида V_k — k-й член второй строки последовательности ψ, т.е. $\psi^2{}_k=F_k$. Индуктивные пункты определения выполнимости обычны.

Описанный метод легко распространить на любые языки со сколь угодно большим, но конечным числом семантических категорий переменных. В этом случае можно пронумеровать категории, а всем переменным приписать индексы таким образом, чтобы верхний индекс, например, указывал номер соответствующей категории. Если язык содержит n различных категорий переменных, рассматриваются, соответственно, n-строчные последовательности. Для данного фиксированного числа n все такого рода n-строчные последовательности принадлежат к одной и той же семантической категории. Переменной вида V_k^i приписывается k-тый член i-той строки последовательности, где $1 \leq i \leq n$.

Однако метод многострочных последовательностей не применим для определения понятия выполнимости для языков с *бесконечным* числом семантических категорий переменных, хотя и конечного порядка (т.е. для языков 3-го типа в классификации Тарского). В этом случае можно применить метод семантической унификации, или семантического объединения, переменных. Идея состоит в том, что если у нас *порядок* категорий *конечен*, то бесконечное число семантических категорий переменных может быть сведено к конечному числу для каждого данного порядка. В целом получаем конечное число семантических категорий и можно применять метод многострочных последовательностей. Естественно, метод семантического объединения переменных применим и к языкам 2-го типа.

В случае логики бинарных отношений — с индивидными и двуместными предикатными переменными каждому индивиду a можно однозначным образом сопоставить некоторое бинарное отношение, обозначим его a^* так, что различным индивидам сопоставятся различные бинарные отношения. Всегда можно найти эффективную функцию f, отображающую множество индивидов на подмножество множества пар индивидов. Так, каждому индивиду a можно сопоставить множество, состоящее из одной пары индивидов, первый и второй члены которой тождественны a. Иными словами, a^* есть бинарное отношение R, удовлетворяющее условию:

$$\forall x\forall y((R(x,y)\equiv(x=a)\&(y=a))\&\forall z\forall u((R(z,y)\supset(x=z))\&(R(x,u)\supset(y=u))))$$

Таким путем каждому классу индивидов однозначным образом сопоставится класс бинарных отношений указанного вида. Все константы сохраняют свое прежнее значение, а все переменные как 1-го, так и 2-го порядка пробегают по бинарным отношениям. С синтаксической точки зрения переменные по-прежнему принадлежат к двум различным категориям, а в семантическом плане, в силу придаваемой им интерпретации, — к одной и той же семантической категории (категории бинарных отношений). Соответственно, рассматриваем последовательности, принадлежащие к одной семантической категории — последовательности бинарных отношений. Каждой переменной вида v_k приписывается член последовательности с индексом $2k$-1, а переменной второго порядка V_k — член последовательности с индексом $2k$. Последовательность бинарных отношений F выполняет элементарную формулу $\rho_{k,l,m} = ((V_k \hat{}\, v_l)\hat{}\, v_m)$, если и только если $\exists a\exists b((aF_{2k}b)\&(F_{l-l}=a^*)\&(F_{m-1}=b^*))$, т.е. ($2l$-1)-й и ($2m$-1)-й члены последовательности F представляют собой такие отношения a^* и b^*, что *между соответствующими им индивидами* имеет место отношение F_{2k}. Таким образом, отношение F_{2k}, приписанное предикатной переменной V_k, имеет место между индивидами, но переменным v_l и v_m приписаны отношения, сопоставленные одно-однозначным образом этим индивидам.

Объединяющая семантическая категория не может иметь порядок ниже порядка встречающихся в языке категорий. Для всякого языка 2-го типа (т.е. с конечным числом семантических категорий) всегда можно найти объединяющую семантическую категорию, и даже не одну, порядок которой будет n, если n — наивысший порядок встречающихся в языке категорий переменных (как это и было показано в случае языка логики бинарных отношений).

Примером языка 3-го типа может служить исчисление предикатов 2-го порядка (с кванторами по индивидным и предикатным переменным). К 1-му порядку относится категория индивидных переменных. *Предикатные* переменные принадлежат к *бесконечному числу* семантических категорий. Но все категории предикатных переменных имеют порядок 2. В качестве *унифицирующей* семантической категории, объединяющей все предикатные переменные, могут выступать классы конечных последовательностей индивидов. Каждому n-членному отношению R_n можно одно-однозначным образом сопоставить определенный класс n-членных последовательностей индивидов — обозначим его R^*; n-членному отношению R_n сопоставляется класс тех и только тех конечных последовательностей индивидов, между соответствующими членами которых, т.е. f_1, f_2, ... f_n имеет место отношение R_n: $\forall f(f \in R^* \equiv R(f_1, f_2, \dots f_n))$.

Теперь каждому n-членному отношению однозначно сопоставлен класс конечных последовательностей индивидов. Напомним, что все последовательности индивидов, независимо от числа их членов, принадлежат к одной и той же семантической категории. Собственно, и классы таких конечно-членных последовательностей — в противоположность многоместным отношениям — принадлежат к одной и той же семантической категории.

Заметим, что в случае арифметизации синтаксиса такого рода конечно-членные последовательности индивидов могут быть эффективным образом пронумерованы — однозначным образом отображены на множество натуральных чисел. Тогда вместо конечно-членных последовательностей говорят о числах, их представляющих. Каждому многочленному отношению R, в таком случае, сопоставится однозначным образом класс чисел, номеров соответствующих конечночленных последовательностей, принадлежащих R^*.

Посредством такого искусственного приема можно сохранить семантическую однозначность понятия выполняемости для языков, содержащих переменные, принадлежащие к бесконечному числу семантических категорий; при формализации такого рода семантической теории мы обходимся одним термином выполнимости и, соответственно, истинности.

Метод семантической унификации переменных позволяет использовать при определении понятий выполнимости и истинности те методы, которые использовались для языков с конечным числом семантических категорий — языков 2-го типа. Можно, например, использовать тот же метод многострочных последовательностей и ввести понятие *«последовательность индивидов f и последовательность F классов конечных последовательностей индивидов совместно выполняют формулу* $(...((V_k\hat{}v_1)\hat{}v_2)...\hat{}v_n)$.

Остальное связано с чисто техническими деталями. Нужно задать метод однозначного приписывания переменным вида V_k^n соответствующих членов последовательности F. С этой целью можно использовать любую арифметическую функцию, нумерующую пары, т.е. такую функции как J_2 (k,l), которая каждой паре чисел k, l сопоставляет единственное число m. Тогда каждой переменной вида V_k^n однозначно сопоставится член последовательности F за номером $J_2(n,k)$. Например, двуместной k-той предикатной переменной V_k^2 сопоставится член последовательности $F_{J_2(2,k)}$.

Индивидным переменным вида v_k обычным образом приписываются члены последовательности индивидов f. Мы будем говорить, что упорядоченная пара последовательностей $<f,F>$ выполняет элементарную формулу вида $(V_k^n\hat{}v_1\hat{}v_2\hat{}...\hat{}v_n)$, если и только если n-членная последовательность g такая, что $(\forall i)[(1 \leq i \leq n)\supset(f_i=g_i)]$ входит в тот класс n-членных последовательностей R^*, который приписывается последовательностью F переменной V_k, т.е. входит в класс $F_{J_2(n,k)}$.

Выполнимость и истинность сложных формул определяется индуктивно, аналогично тому, как это делалось для языков 1-го и 2-го типа с конечным числом семантических категорий переменных.

Метод объединения переменных в одну семантическую категорию может применяться к любым языкам 3-го типа. Единственная трудность, которая здесь может возникнуть, заключается в нахождении объединяющей категории. Как мы отмечали, категория, избранная в качестве объединяющей, должна иметь порядок не ниже наивысшего порядка категорий переменных, встречающихся в этом языке. Можно показать, что для любого языка с переменными, порядок которых не превосходит данное число *n* (n>3), объединяющей категорией может служить любая категория порядка *n*. Если же выражения языка принадлежат к категории порядка меньше n и при этом арифметическим переменным, пробегающим по числам, приписывается порядок 3, то для такого языка объединяющую категорию нельзя выбрать среди категорий тех порядков, которые встречаются в этом языке. Подводя итог, можно сказать, что рассмотренные методы позволяют уточнить понятие выполнимости и тем самым построить формально корректное определение истинности для любых языков *конечного* порядка.

Предложенные А.Тарским методы связаны с преодолением семантической неоднозначности вводимых понятий. Дело в том, что такого рода неоднозначность Тарский рассматривал как вопрос принципиального характера, если мы хотим построить корректные определения вводимых семантических понятий. Формализованные языки могут различаться на чисто формальном, синтаксическом, уровне — видом символов, способами конструирования сложных выражений и т.д. Однако формализованные языки дедуктивных теорий имеют некоторую общую базу — *принципы построения, коренящиеся в семантике*. В основе таких языков лежит теория семантических категорий. Именно семантические категории определяют правила интерпретации формализованных языков, типы сущностей (значений), приписываемых знакам языка. Более того, именно логические системы предоставляют — актуально или потенциально — все те семантические категории, которые выступают в языках дедуктивных наук. А. Тарский полагал, что теория семантических категорий столь глубоко проникает в структуру выражений такого рода языков, что вряд ли можно представить себе язык дедуктивной теории, который не отвечал бы принципам этой теории. «Мне тогда казалось, — писал он в резюме своей основополагающей работы, — что теория семантических категорий так глубоко проникает в фундаментальный, интуитивно постигаемый смысл выражений, что едва ли возможно представить себе научный язык, высказывания которого обладают четким содержательным смыслом и построение которого в то же время не может быть согласовано с этой теорией в одном из ее толкований» [7].

В основе такого рода формализованных языков прежде всего лежит определенный метод анализа структуры выражений и репрезентации их логической формы (2, гл. II). Анализ начинается с высказываний, сложные выражения членятся по схеме: функтор и его аргументы. Способ такого анализа аналогичен принятому в языках математики. Категория функтора определяется числом и категориями его аргументных выражений. В правильно построенных выражениях («синтаксически связанных» — в терминологии К.Айдукевича) за функторным выражением следует соответствующее число аргументных выражений точно заданных категорий.

Другое дело, что возможны *разные системы* семантических категорий в зависимости от того, какие категории принимаются за исходные, а также от того, всем ли синтаксическим категориям сопоставляются семантические. Так, если в качестве исходной семантической категории выступает только категория имен — *n*, выражения категорий *s/s*, *s/ss*, ... , например логические связки, выступают как синкатегорематические знаки, аналогично встает вопрос о категориях кванторов и операторов [2, гл. II], [3, гл. 4, § 4].

При установлении принадлежности двух выражений к одной семантической категории при указанном пути выявления категорий выражений языка мы не можем перебрать бесконечное множество высказываний, в которые входят или могут входить эти выражения, — заменяя их одно на другое. Принимается упомянутый выше основной принцип теории семантических категорий, принцип, *не связанный с построением системы семантических категорий.* Но этот принцип определяет *условие приписывания* семантических категорий выражениям языка.

Указанный принцип кажется вполне приемлемым для формализованных языков, поскольку семантические правила интерпретации приписывают заданным в синтаксисе категориям знаков определенные типы сущностей (значений). Однако уже при введении семантических понятий мы сталкиваемся с неоднозначностью, связанной именно с принятием основного принципа теории семантических категорий. Одно и то же понятие должно быть отнесено к разным семантическим категориям. Другое дело, что эти трудности, как мы видели выше, могут быть преодолены для языков конечного порядка посредством искусственных, технических приемов. Вопрос заключается в роли и универсальной значимости основного принципа.

Принятие (или не принятие) основного принципа теории семантических категорий, на наш взгляд, связано *с разграничением стабильных и контекстно зависимых значений.* Я предлагаю различать «стабильные» значения, задаваемые принимаемой иерархией семантических категорий, и типы смыслов (значений), которые задаются контекстами, зависят от принимаемых *способов интерпретации* выражений языка, способов приписывания значений выражениям.

Для естественных языков роль основного принципа — это вопрос контекстной зависимости значений выражений языка и их типологии. Можно ли говорить о стабильных типах значений — *категориях значения* — независимо от контекстов употребления?

Принятие основного принципа применительно к естественным языкам по крайней мере сомнительно. Логико-семантический метод анализа применим к контекстам естественного языка, он позволяет выявлять типы значений выражений языка, уточнять их семантику. Однако в конечном счете смысл выражения языка определяется способом употребления его в языке, контекстом. Можно выделить два плана анализа выражений естественного языка. Можно исследовать «стабильные» значения. Это план референциального, репрезентативного аспекта языка, Другое дело — функционирование языка как системы и, соответственно, правил употребления выражений в этой системе, зависимость смысла от «языковых игр».

Анализируя языковой знак, семантику выражений естественного языка, Фердинанд де Соссюр выделял два аспекта знака: понятие и акустический образ или, соответственно, в иных терминах, — означаемое и означающее. Другое дело — тот смысл, то значение, которое приобретает выражение в контексте. Это особое значение, приобретаемое выражениями в силу их функционирования в языке как системе, Ф. де Соссюр называл *значимостью.* (Сравни значение слова «солнце» в контекстах: «Солнце светит и греет» и «греться на солнце».) «Когда ради простоты я говорю, что данное слово что-то означает, когда я исхожу из ассоциации акустического образа с понятием, то я этим утверждаю то, что может быть верным лишь до некоторой степени...» [4, с. 150]. «Но вот в чем парадоксальность вопроса: понятие представляется нам как то, что находится в соответствии с акустическим образом внутри знака, а, с другой стороны, этот знак, то есть связывающее оба его компонента отношение, так же и в той же степени находится в свою очередь в отношении соответствия с другими знаками языка. Раз язык есть система, все элементы которой образуют целое, а *значимость одного элемента проистекает только от одновременного наличия прочих...* , то спрашивается, как определенная таким образом значимость может быть спутана со значением, то есть с тем, что находится в соответствии с акустическим образом?» [4, с. 147] (*выделено мной — Е.С.*). Значимости — это фактически те смыслы, которые задаются функционированием выражений в языке — «позицией в шахматной игре», а не исходным «значением» фигур.

Мы приходим к тому, что в языке приходится разграничивать два плана значений: значения, связанные с референциальным аспектом языка, и контекстно зависимые значения. В определенных случаях последние могут быть связаны с коммуникативным аспектом языка, с прагматикой, «языковыми играми», наконец. «Спор» позднего Витгенштейна с ранним, на мой взгляд, — это спор исследователя этих двух разных аспектов функционирования языка («язык и онтология» и «язык и деятельность, коммуникация»).

Основной принцип теории семантических категорий связан с вопросом выделения стабильных значений в отличие от контекстно зависимых. Типология значений выражений в естественных языках сохраняется. Более того, те методы логико-семантического анализа, которые разработаны для искусственных языков, позволяют более точно репрезентировать структуру выражений, позволяют выявлять и характеризовать семантические типы выражений естественного языка (напр., выделять предметные функторы n/n : «*вес* тела», «*король* Франции», «*скорость* света»; предикаторы — s/n, s/nn, ... : «бел», «старше», «король», «отец»).

Однако с логической точки зрения выражение «мать» в контекстах «Анна — мать Петра» и «Анна — мать» и выражение «король» в контекстах «Людовик XIV — король» и «король Франции» принадлежат к разным семантическим категориям (бинарный и унарный предикаты, соответственно; предметный функтор и предикатор во втором примере). Если принимается основной принцип теории семантических категорий, то слово «мать» (аналогично, «король») в этих двух контекстах принадлежит к двум разным семантическим категориям, имеет иной тип значения и как бы представляет с логической точки зрения *два различных выражения.* Если же не принимать основной принцип, то это означает, что одно и то же выражение (слово) в разных контекстах может принадлежать к *различным семантическим категориям*, т.е. это означает *семантическую неоднозначность* выражения.

Отметим, что для *построения иерархии семантических категорий* основной принцип не нужен. Выделяются исходные категории, постулируются способы построения производных — получаем определенную систему семантических категорий. Другое дело — вопрос *отнесения выражений языка* к определенным семантическим категориям. В этом случае вступает в силу основной принцип.

Одно дело — построение определенной системы семантических категорий, другое — выделение семантических категорий некоторого фиксированного языка, принцип разбиения их на непересекающиеся классы. Следует четко различать эти два вопроса. Проблемы с основным принципом теории семантических категорий возникают именно в связи с отнесением выражений языка к определенным семантическим категориям. Всегда ли возможно такое однозначное отнесение?

Однако само понятие семантической категории вводится, как отмечалось, на основании понятия «принадлежать к одной семантической категории». Последнее же опирается на условие замены выражений α и β в высказываниях. На основании свойств отношения «принадлежать к одной семантической категории» (отношения типа равенства) все выражения языка разбиваются на непересекающиеся классы (категории значения). Однако если основной принцип не действует, это ставит под сомнение непересекаемость указанных классов, стабильность типов значений.

Для формализованных языков приписывание стабильных значений осуществляется в метаязыке, определяется правилами, задаваемыми в семантике. Таковыми, например, являются правила приписывания значений индивидным и предикатным константам. Однако неполным символам, выражениям, не являющимся десигнативными (логические связки, операторы, дескриптивные имена), значения не могут приписываться таким путем; эти выражения не имеют самостоятельного значения в изоляции. Но можно дать явное определение контекстов, в которые они входят, т.е. неполные символы вводятся посредством контекстуальных определений. Для дескрипций, трактуемых по Расселу, например:

$$B((\iota x)Ax) \equiv \exists x \forall y(A(y) \supset y{=}x \& B(x)).$$

Однако введенные посредством контекстуальных определений неполные символы *не меняют значений от контекста к контексту, здесь иной принцип зависимости от контекста.*

Семантические правила интерпретации для формализованных языков таковы, что фактически реализуется основной принцип, хотя он не нужен ни для построения иерархии семантических категорий, ни для отнесения выражений таких языков к определенным семантическим категориям. Семантические правила интерпретации обеспечивают отнесенность выражений к определенным категориям значения. Однако и в формализованных языках, как увидим ниже, вводятся знаки, типология значений которых не детерминируется однозначно семантическими правилами. В этом случае не действует основной принцип.

В случае естественных языков речь идет именно об осмысленных предложениях и при этом принимается, что мы каким-то особым образом умеем (и притом эффективно) выделять таковые — хотя правила синтаксиса этого обеспечить не могут. (Сравни, напр., предложения: «Лист зеленый», «Дух зеленый», «11 — простое число», «Цезарь — простое число», «Глокая куздра бокранула бокренка».) Затем производим в них замену одних выражений на другие — с сохранением осмысленности предложений. Тогда либо приходится принимать мистическую способность «обозрения» бесконечного ряда замен в такого рода контекстах, либо принимать основной принцип. Иначе не возможно реализовать задачу однозначного отнесения выражений естественного языка к определенным семантическим категориям.

Вопрос об основном принципе теории семантических категорий приобретает особое значение при построении семантик для формализованных языков бесконечного порядка.

Согласно Тарскому, возможны два подхода, два пути введения семантических понятий: 1) семантические понятия (например, понятие истинного высказывания) вводятся в метаязык как *первичные*, исходные, а их свойства определяются системой аксиом; 2) семантические понятия вводятся *посредством определений.*

В первом случае семантическая теория строится как самостоятельная дедуктивная теория с собственной системой аксиом и требуется специальное доказательство непротиворечивости построенной теории. Возникает также проблема полноты этой теории: достаточно ли введенных аксиом для того, чтобы все существенные утверждения относительно рассматриваемого понятия (напр., закон исключенного третьего и т.п.) выводились из аксиом системы?

Согласно второму подходу, метатеория в качестве первичных, неопределяемых терминов не содержит никаких семантических терминов, относящихся к объектному языку. В этом случае к метаязыку данного объектного языка предъявляются следующие требования:

(1) В нем имеются средства для описания синтаксических свойств объектного языка, в частности имеются средства для построения имен выражений объектного языка.

(2) Метаязык долен быть настолько богат, чтобы для каждой формулы объектного языка существовала формула метаязыка, являющаяся переводом первой; другими словами, все то, что можно утверждать в терминах объектного языка, может быть сказано в метаязыке.

(3) Метаязык должен содержать логическую часть не менее богатую, чем в объектном языке.

(4) Когда мы строим определение понятия «истинное высказывание в *L*», где *L* — некоторая объектная теория, то для построения этого определения не играет роли, каковы правила преобразования системы *L*. Но система *ML*, в которой строится определение истинности для *L*, должна содержать систему аксиом и правил вывода, достаточную для того, чтобы с их помощью и на основе определения истинности можно было бы доказать каждый частный случай подстановки в схему (1), если мы хотим, чтобы введенный по определению предикат «истинно» был материально адекватным*.

(5) Существенным для метаязыка является то, что в нем, помимо переменных тех же самых семантических категорий,

* (1) "*X* есть истинное высказывание тогда и только тогда, если *p*", где вместо *X* подставляется имя любого высказывания рассматриваемого языка, а вместо *p* — предложение метаязыка, являющееся переводом *X*. Введенное по определению понятие истинного высказывания языка *L* будет адекватным в том и только в том случае, если для него верны (могут быть доказаны в метаязыке) все случаи подстановки в схему (1)

что и в объектном языке, должны быть дополнительные переменные, принадлежащие к более высокому порядку.

При наличии указанных условий в метаязыке могут быть определены такие семантические понятия, как понятия выполнимости, истинности высказываний, определимости свойств и отношений и т.д. Сам факт возможности определения семантических понятий (хотя бы для формализованных языков) на базе *несемантических понятий* имеет важный философский смысл и, кроме того, играет особо существенную роль в разработке методологии дедуктивных наук. Преимущество указанного пути построения семантики состоит в том, что мы получаем своего рода «гарантию», что связанные с употреблением семантических терминов парадоксы не появятся в этом случае. Если несемантическая часть метаязыка непротиворечива, то добавление семантических терминов, вводимых указанным путем *по определению*, не ведет к противоречию. При аксиоматическом же способе построения семантики такой уверенности нет, и нужно дополнительное доказательство непротиворечивости вводимой системы аксиом.

Однако указанная элиминация семантических терминов возможна лишь при условии, что метаязык существенно богаче объектного языка и в том смысле, что выражения объектного языка переводимы в метаязык, и главное — в том смысле, что метаязык дополнительно содержит переменные категорий более высокого порядка.

Для формализованных языков конечного порядка может быть построено в метаязыке формально корректное и адекватное определение понятия истинности (истинного высказывания) на основе только выражений общелогического характера, выражений самого объектного языка, а также выражений, принадлежащих синтаксису языка. Можно ли построить таким путем определение понятия истинности для любых формализованных языков, и какую при этом роль играет теория семантических категорий?

Для языков бесконечного порядка построить определение понятия истинного высказывания указанным выше способом в принципе невозможно — если метаязык языка бесконечного порядка также построен на базе теории семантических категорий, выполняется основной принцип этой теории и порядок семантических категорий устанавливается стандартным образом. В случае языков бесконечного порядка метаязык не может быть существенно богаче объектного языка — в том плане, что метаязык не может содержать переменные, принадлежащие более высокому порядку, чем переменные объектного языка.

Дело не в том, что не «срабатывают» методы многострочных последовательностей и даже семантической унификации переменных. Тогда вопрос встал бы о поиске иных методов, позволяющих построить определение понятия истинного высказывания, отвечающего условиям конвенции. Трудности в данном случае носят принципиальный характер, связаны с характером семантических понятий.

Для достаточно богатых языков — языков, содержащих рекурсивную арифметику, — синтаксис может быть описан в самом языке, но семантические понятия, в том числе понятие истинности, в нем не выразимы — не являются семантически определимыми в нем [8, VI], [6]. Таким образом, трудности, связанные с определением истинного высказывания для языков бесконечного порядка носят принципиальный характер.

Если бы можно было для языка бесконечного порядка построить в соответствующем метаязыке — также построенном на основе теории семантических категорий и принятой иерархии порядков — определение понятия «истинное высказывание» на базе только несемантических терминов, то вновь возродился бы парадокс Лжеца, поскольку в этом случае можно погрузить метаязык в объектный язык. К такому выводу приходит А.Тарский [7, § 5].

Однако сказанное не означает, что для языков бесконечного порядка нельзя ввести в соответствующем метаязыке понятие истинного высказывания. Но этот термин уже не вводится через несемантические термины, в метаязыке принимаются аксиоматически описываемые некоторые исходные семантические термины. Такая возможность аксиоматического построения семантики объектного языка в соответствующем метаязыке, указанная Тарским, была реализована рядом логиков. Однако при таком подходе открытым остается вопрос, не является ли таким образом построенная семантическая теория противоречивой. Возникает также проблема полноты и категоричности теории. Дедуктивных средств метатеории может быть недостаточно для доказательства наиболее важных теорем, касающихся рассматриваемых семантических понятий.

Закрыт ли описанный путь введения семантических понятий посредством определений для языков бесконечного порядка и какую роль играет в этом вопросе теория семантических категорий и ее основной принцип? Если в естественных языках принятие основного принципа теории семантических категорий связано с разграничением стабильных и контекстно-зависимых значений, то в случае формализованных языков речь может идти, казалось бы, только о стабильных, не меняющихся в зависимости от контекста значениях, задаваемых только правилами интерпретации системы.

В приложении к немецкому изданию своей работы А.Тарский приходит к выводу, что не обязательно все формализованные языки строятся в соответствии с теорией семантических категорий так, чтобы выполнялся основной принцип этой теории. «...В этой связи мне теперь представляется интересным и важным исследовать, каковы будут следствия для основной проблемы данной работы, если мы включим в область рассмотрения формализованные языки, в которых больше *не действует основной принцип теории семантических категорий*» [8, 268] (*выделено мной. — Е.С.*).

Но и для этих языков понятие порядка играет по-прежнему существенную роль. Однако, поскольку основной принцип теории семантических категорий не действует, может оказаться, что один и тот же знак выполняет роль функтора в нескольких функциях высказывания, в которых однако аргументы, занимающие одинаковые места, принадлежат тем не менее, к различным порядкам. Если все аргументы во всех функциях высказывания, в которых встречается функтор, имеют порядок *меньше определенного натурального числа n*, то и рассматриваемому функтору приписывается *конечный* порядок — натуральное число *n* (если по крайней мере в одной из этих функций высказывания порядок по крайней мере одного из аргументов в точности равен *n*-1); все такого рода функторы являются знаками конечного порядка.

Однако в языках могут встречаться функторы, аргументы которых, хотя и имеют конечный порядок, но этот порядок *не ограничен сверху никаким натуральным числом m* (например, знак «$\in$» в простой теории типов). Подобного рода знакам будет приписываться *бесконечный* порядок. Для того, чтобы подразделить знаки бесконечного порядка, Тарский использует трансфинитные порядковые числа. Тем знакам бесконечного порядка, которые являются функторами функций высказывания, в которых аргументы принадлежат только к конечным (хотя может быть и различным в различных пропозициональных функциях) порядкам, приписывается в качестве порядка наименьшее трансфинитное порядковое число ω. Общее определение порядка следующее: порядок определенного знака есть наименьшее порядковое число, которое больше, чем порядки всех аргументов во всех функциях высказывания, в которых данный знак выступает в качестве функтора.

По-прежнему языки подразделяются на языки конечного и языки бесконечного порядка. Каждому языку в качестве его порядка может быть поставлено в соответствие вполне определенное порядковое число (которое превосходит порядки всех встречающихся в языке переменных). Так, языку общей теории классов в качестве его порядка ставится в соответствие наименьшее трансфинитное порядковое число ω. Однако все переменные этого языка имеют определенный конечный порядок.

Из сказанного не следует, что во всех исследуемых языках каждая переменная принадлежит к одному определенному порядку. Именно с целью обогащения выразительных возможностей языков так, чтобы они превосходили выразительные возможности рассматриваемого типа языков, как конечного так и бесконечного порядка, приходится отказываться от существенного ограничения — употреблять переменные только определенного порядка. В рассмотрение вводятся языки с переменными, которые «пробегают», так сказать, по всем возможным порядкам. В то же время и для такого рода языка, как отмечает А.Тарский, понятие порядка не теряет своего значения.

Однако от рассмотренного типа языков «всего один шаг до языков иного рода». В этих языках все переменные имеют неопределенный порядок. С формальной точки зрения, считает Тарский, эти языки имеют простую структуру и их можно причислять к языкам 1-го типа [8, с. 271]. Переменные в этих языках принадлежат к одной семантической категории в силу взаимозаменимости и условия отнесения выражений языка к одной семантической категории, рассмотренного выше. Для такого рода языков понятие порядка теряет свое значение применительно к выражениям языка. Однако понятие порядка может быть применено к объектам, индивидам и классам. Порядком любого множества выступает наименьшее порядковое число, которое больше, чем порядки элементов этого множества. Введение в рассмотрение языков с переменными *неопределенного* порядка позволяет вовлечь в сферу рассмотрения более широкий класс языков и поставить вопрос о возможности определения понятия истинного высказывания методом Тарского для языков бесконечного порядка. В число такого рода языков попадают языки теории множеств, свободные от теории типов, к ним относится теория множеств Цермело и различные ее модификации: теория множеств Цермело-Френкеля, Бернайса-Неймана и др. Однако, допущение в языках переменных неопределенного порядка не безобидно — возникает опасность появления антиномий типа известной расселовской антиномии множества всех множеств, не содержащих себя в качестве собственного элемента. Чтобы избежать возникновения такого рода антиномий накладываются определенные ограничения на правила преобразования системы.

Заметим. что ситуация с переменными неопределенного порядка аналогична положению с выражениями естественного языка, значения которых контекстно зависимы: либо мы относим их к определенным, но разным категориям, либо должны рассматривать выражения неопределенных категорий.

Переменные трансфинитного порядка могут вводиться не только в объектные языки, но и в метаязыки, предназначенные для их описания, Последнее имеет решающее значение для исследуемой проблемы; метод определения истинности, предложенный Тарским, распространяется и на языки бесконечного порядка, ибо теперь для каждого объектного языка можно построить метаязык более высокого порядка. В качестве метаязыка могут выступать языки с переменными неопределенного порядка, типа цермеловской теории множеств. Дж.Кемени построил определение понятия истинности простой теории типов T (т.е. языка бесконечного порядка) в цермеловской теории множеств Z, в языке, свободном от теоретико-типовой иерархии. Кроме того, Кемени показал, что доказательство непротиворечивости T может быть построено в Z.

Таким образом, Тарский приходит к заключению, что для *любого* языка в метаязыке может быть построено формально правильное и материально адекватное определение истинного высказывания посредством только выражений общелогического характера, выражений самого языка и выражений из морфологии языка, т.е. выражений, относящихся к синтаксическому описанию объектного языка.

Однако при этом остается в силе основной результат Тарского — метаязык, адекватный для построения семантики должен быть существенно богаче объектного языка, т.е. должен содержать переменные более высокого порядка.

Основное значение работы Тарского состоит не только в том, что он предложил определенное уточнение понятия истинности и построил формально корректное определение понятия «быть истинным высказыванием системы *L*», отвечающее всем требованиям материальной адекватности, сформулированным в схеме (1), — подобный результат сам по себе интересен с точки зрения разработки методологии дедуктивных наук, с точки зрения анализа выразительных возможностей, средств и методов дедуктивных теорий. Однако основное значение работы — прежде всего в том, что Тарский дал определенный строгий метод построения семантической теории (теории референции), при котором семантические понятия теории вводятся посредством определений и могут быть элиминированы — путь, гарантирующий от возникновения семантических антиномий.

Литература

1. *Кондильяк Э.* Логика, или начала искусства мыслить, М., 1983.
2. *Смирнова Е.Д.* Формализованные языки и проблемы логической семантики. М., 1982.
3. *Смирнова Е.Д.* Логика и философия. М., 1996.
4. *Соссюр Ф.* Труды по языкознанию. М., 1977.
5. *Gödel K.* Uber formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme // Monatshefte für Mathematik und Physic, B.38, 1931.
6. *Mostowski A.* Sentences undecidable in formalized Arithmetic. An exposition of the theory of Kurt Gödel. Amsterdam, 1952.
7. *Tarski A.* Der Wahrheitsbegriff in den formalisierten Sprachen // Studia Philosophica, 1933, Bd. 1, S. 261-405.
8. *Tarski A.* Logic, Semantics, Metamathematics. Oxford, 1956.

Е.А.Сидоренко

Семантика следования (для системы E)*

Данная статья продолжает исследования автора по двухуровневой (двухэтажной) реляционной релевантной семантике с бинарным отношением достижимости, начало разработки которой было положено в работах [1-3]. Основное внимание сосредоточено на техническом построении и анализе самой семантики, ее содержательном и философском обосновании. Семантика строится, исходя из содержательных интуитивных представлений о следовании, а затем демонстрируется, что класс семантически истинных формул совпадает с классом теорем известной релевантной системы E.

Основные идеи и технические результаты по двухуровневой реляционной семантике релевантной логики были до сих пор наиболее полно изложены мной в [3]. Настоящая работа во многих отношениях существенно отличается от упомянутой. Там главная цель состояла в том, чтобы "застолбить" оригинальный подход к проблеме, осуществить техническое построение реляционной семантики (причем с *бинарным* отношением достижимости) для известных исчислений релевантной логики [5] и в первую очередь таких, как *E*, *R* и *NR*. Важно было сделать упор, *во-первых*, на то, что эта семантика является именно *бинарной*, так как для релевантной логики удавалось построить реляционную семантику только с тернарным отношением достижимости [6,9,13], что делало весьма проблематичной сколько-нибудь удачную ее содержательную интерпретацию. А, *во вторых*, на то, что предлагаемая семантика была адекватна названным исчислениям, ибо семантик как таковых, вообще говоря, строилось и может быть построено сколько угодно. Теперь, когда названные цели достигнуты, можно сосредоточится на анализе самой семантики, ее содержательном и философском обосновании[1], более тща-

---

* Работа выполнена при поддержке РГНФ, грант 96-03-04556.

[1] О том, насколько большое значение имеет такое обоснование для самой логики, для понимания смысла логических принципов, описываемых различными логическими системами, и претензий таких систем на статус

тельное внимание уделить проблеме адекватности семантики, а также вопросам отработки понятийного аппарата[2].

1. Теоретические и идейные предпосылки двухуровневой семантики следования

От обычной реляционной семантики крипкевского типа обсуждаемая семантика (мы обозначаем ее как S^{ea}) отличается тем, что *миры* (в содержательном плане их более уместно называть *универсумами рассуждения*), обозначаемые как w_1, w_2,..., являются двухуровневыми, имея, так сказать, два *этажа*. Первый из них (этаж *a*) - это обычный крипкевский мир (карнаповское описание состояний, атомарный мир), обозначаемый для мира w_i как w_i^a. Второй этаж w_i^e (мир следствий, этаж *e*, от слова *entailment*) - это некоторый список формул объектного языка[3].

Ниже все эти понятия будут определены с необходимой точностью. Пока укажем только, что попадание формул на второй этаж связано исключительно с признанием верности некоторого высказывания о следовании вида $A \rightarrow B$ или эквивалентного ему. Высказывание $A \rightarrow B$ является истинным (верифицируется) в некотором мире w_i (равнозначно сказать - на первом этаже этого мира w_i^a) только в том случае, когда в каждом достижимом из w_i мире w_j, в котором истинно *A*, на втором его этаже имеется *B*. Что же дает такое разнесение антецедента (условия, основания) *A* и следствия *B*, входящих в высказывание $A \rightarrow B$, по разным этажам?

логических, см. у *Е.Д. Смирновой* [10] Некоторые общефилософские вопросы, связанные с рассматриваемой семантикой, рассматриваются мной в [7].

2 В этом отношени определенную помощь дало мне обсуждение рассматриваемых здесь проблем с *В.А.Смирновым*, *В.М.Поповым*, *В.Л.Васюковым*, *J.M.Dann'ом*. Немалую роль сыграла возможность обсуждения предлагаемой семантики на заседаниях научно-исследовательского семинара логического центра Института философии РАН. При написании работы я всегда держал в уме возможную (неизбежную) критику со стороны *Е.К.Войшвилло*, своего постоянного оппонента в вопросах понимания следования и его семантики.

3 Из принятых нами обозначений "этажей" как *a* и *e* и возникло обозначение семантики как S^{ea} . Возможно более точным обозначением было бы S_a^e, передавая тем самым идею этажности уже в самом обозначении, но по своему графическому виду оно кажется менее удачным.

Допустим Вам известно, что два высказывания A и B сейчас, на данный момент истинны. Достаточно ли этого, чтобы утверждать, что одно из них влечет другое? Если Вы не отождествляете следование с *материальной импликацией*[4], и имеете в виду реальную связь между тем, о чем говорится в этих высказываниях, то ответ, очевидно, будет отрицательным. Ибо истинными одновременно эти высказывания могут оказаться чисто случайно, и одно из них может говорить о *бодливой козе*, а другое - об *уравнении Шредингера*.

Таким образом, одновременной истинности A и B в некотором мире для признания истинности высказывания $A \to B$ с *релевантной* импликацией (т.е., с такой импликацией, которая изначально должна отображать только *уместные* реальные связи между высказываниями и соответствующими им событиями) явно недостаточно. *Реляционная семантика крипкевского типа* позволяет ввести дополнительное условие истинности для $A \to B$ в мире w_i. В этой семантике задается отношение достижимости между мирами. Содержательно это может быть представлено так, что один мир *достижим* из другого (*возможен* относительно другого), если отличается от него истинностью только случайных высказываний, сохраняя при этом истинность всех необходимых[5].

Чтобы признать $A \to B$ в данном мире нужно, чтобы B было истинно во всех тех достижимых мирах, где истинно A. Теперь совместной истинности (может быть, чисто случайной) A и B в некотором мире для признания верности $A \to B$ в этом мире уже будет недостаточно. Однако семантические трудности с установлением корректных условий истинности утверждений о следовании и в этом случае не будут до конца преодолены. Должны ли мы будем считать истинным любое из высказываний $A \to B$ в мире, где A - необходимо ложно или B - необходимо истинно? Формально требуемое условие в этом случае соблюдается, но A и B опять-таки могут быть из "разных опер", т.е., говорить о заведомо никак не связанных событиях.

---

4 В этом случае, как известно, всякое истинное высказывание влечется любым, а из ложного следует любое. И поэтому всегда или A влечет B, или B влечет A, или имеет место и то, и другое.

5 В такой семантике некоторое высказывание считается в данном мире необходимым (необходимо истинным), если и только если оно истинно во всех достижимых из данного мирах.

Это обстоятельство, кстати сказать, вызвало определенные трудности при построении семантики следования для так называемой *первопорядковой* релевантной логики. Речь идет о логике, описывающей все приемлемые утверждения вида $A \to B$, где A и B являются формулами классической логики и не содержат отличного от классических экстенсиональных связок знака “ $\to$” релевантного следования. В этой логике являются неприемлемыми такие утверждения, как $p \to q \vee \neg q$ и $p \neg p \to q$. Как отвергнуть их в рамках семантики возможных миров, если (при сохранении за классическими связками их смысла) приходится дизъюнкцию $q \vee \neg q$ считать всегда истинной, а конъюнкцию $p \neg p$ всегда ложной. Выход находится. В число “возможных“ вводятся миры, во-первых, неполные (т.е., такие, в которые совсем не обязательно входит либо некоторая переменная a, либо ее отрицание $\neg a$, так что в некотором мире оказывается невозможным верифицировать ни q, ни $\neg q$). И, во-вторых, миры “невозможные”, противоречивые (допускающих одновременное наличие a и $\neg a$), в которых в силу этого, напротив, можно верифицировать все что угодно, включая противоречие $p \neg p$. Проблема оказывается решенной, так как для любой классической формулы всегда найдется такой мир, в котором ее можно верифицировать, и такой, в котором ее можно фальсифицировать[6]. Иначе говоря, решение достигается за счет того, что *невозможных* и *необходимых* формул в языке классической логики в рамках предложенной семантики попросту не оказывается.

Изложенный подход может еще быть признан удовлетворительным, пока мы остаемся в рамках *первопорядковой* теории следования. Что делать однако, если в $A \to B$ допускается *итерация* (повторение) знака следования и на месте A и B стоят опять-таки импликативные формулы? Считать ли, например, верной любую формулу вида $A \to (B \to B)$? В релевантной логике такая формула по понятным причинам в качестве логического закона отвергается. Или, скажем, формулу $A \to (A \to A)$? Последняя представляется мне совершенно необоснованной, но в некоторых релевантных (мингловых) системах принимается. Как получить для отвержения этих формул семантические основания, если они удовлетворяет требованию, что во всех

---

[6] Эта проблема детально исследована в работах Е.К.Войшвилло (см., в частности [8]).

мирах, где истинно A, всегда истинно $B \to B$ и $A \to A$? Естественно, что на месте $B \to B$ и $A \to A$ могла бы стоять любая семантически истинная формула. Аналогичным образом будет обстоять дело, если ставить на место A в $A \to B$ любую семантически ложную формулу, например, $\neg(C \to C)$.

Можно ли для преодоления этой трудности поступить также, как это было сделано в случае первопорядковой теории следования. То есть, опять-таки изобрести возможность, чтобы любую формулу в каких-то мирах можно было всегда верифицировать, а в каких-то фальсифицировать. Кажется, что единственно возможным ответом должен быть отрицательный. Действительно, в том рассмотренном первопорядковом языке можно было сами утверждения о логическом следовании либо вообще не относить к объектному языку, либо относить к этому языку только первопорядковые утверждения о следовании. И только эти последние характеризовать как семантически истинные или ложные.

Иначе говоря, язык, для которого мы могли строить семантику, не должен был бы включать выражений вроде закона контрапозиции $A \to B \to . \neg B \to \neg A$, транзитивности импликации $A \to B \to . B \to C \to . A \to C$ и вообще любых формул, в которых знак следования стоит не только на месте главной связки.

Трансформировать первопорядковую семантику следования в семантику итерированного следования - значит каким-то образом совместить две казалось бы несовместимые вещи. С одной стороны, признавать все теоремы (скажем, $A \to A \vee B$) релевантной логической системы семантически истинными (т.е., истинными во всех возможных мирах), а с другой, чтобы отвергнуть $C \to . A \to A \vee B$ при некотором произвольном C, иметь возможность указать мир, в котором C верифицируется, а $C \to . A \to A \vee B$ фальсифицируется.

Попытка добиться нужного результата за счет изобретения способов фальсификации $A \to A \vee B$, если даже что-либо подобное и удастся, вряд ли будет приемлемой. Ну, пусть мы придумаем некие *алогичные* возможные миры, в которых можно будет "проваливать" логически истинные утверждения, но ведь предварительно их (эти самые логически истинные утверждения) уже надо семантически описать, отделив от тех, которые не признаются релевантными.

Оказывается есть возможность пойти по более естественному, а главное, содержательно оправданному пути. Для этого необходимо признать две весьма очевидные вещи.

Первое. Не просто истинности, но даже и необходимой истинности B (как и необходимой ложности A) недостаточно, чтобы утверждать на этом основании наличие между A и B какой бы то ни было связи[7]. В рамках построения семантики следования это означает, что условие, согласно которому в каждом достижимом мире, в котором истинно A, должно быть истинным B, является необходимым, но не достаточным для признания верным $A \to B$.

И, *второе*, надо освободится от иллюзии, что семантика возможных миров (как и вообще любая семантика) способна сама по себе предоставить нам некоторую новую информацию о связи событий (и говорящих об этих событиях высказываниях) помимо той, которую мы уже вложили заранее при описании и определении возможных миров. Скажем, два события мы считаем связанными между собой на том основании, что во всех *возможных* (или во всех *достижимых*) мирах одно невозможно без другого. Но на каком основании миры, в которых дело обстоит иным образом, оказались для нас *невозможными*, или *недостижимыми*, или какими-то там еще? Очевидно, только потому, что определенные предпосылки относительно и миров, и высказываний того или иного вида уже приняты. Отчего это $A \vee B$ не может не быть истинным в мире, где таковым является A ? Да только и только потому, что так определены условия истинности выражения $A \vee B$ [8].

---

[7] Утверждения, что из невозможного следует все, а необходимое из всего называют парадоксами строгой импликации, или парадоксами Льюиса [11]. Пройор заметил как-то, что эти парадоксы указывают, возможно, на определенную внутреннюю связь, которую возможные и невозможные суждения как таковые имеют со всеми суждениями вообще [12, с.196]. Мне в данном случае трудно согласиться с Прайором. Какие основания в самом деле можно найти, чтобы обосновать столь любимое моим однокурсником по МГУ В.Устиненко утверждение: "*Если дважды два - пять, то лошади жуют подковы*"? Или же почему, например, столь нравящееся мне, но, очевидно, невозможное утверждение, взятое из песенки М. Гольдмана: "*И даже Тузенбах, убитый на дуэли, мне позвонил вчера с Канарских островов*" должно влечь что-то к нему совсем не относящееся?

[8] Когда речь идет об информации, которую дает нам семантика возможных миров, вполне уместна следующая шутливая аналогия. Чтобы определить пол пойманного зайца, достаточно отпустить его и посмотреть: если побежал - то заяц, а если побежала - то зайчиха Так и в семантике, если

Допустим однако, что нам удается установить, что в рамках принятой нами семантики для некоторых двух формул (предложений) A и B дело обстоит таким образом, что в любом возможном мире, где истинно A, таковым является также и B. Мы имеем дело с некоторым эмпирическим фактом, с фактическим положением дел. Это определенным образом характеризует предложенную семантику. Но этого отнюдь еще недостаточно для признания того, что A и B как-то связаны в реальности. Утверждение о связи, физической или логической, между ними предполагает нечто большее, и прежде всего переход на некоторый новый более высокий (теоретический) уровень[9]. Так что, если у нас есть основания для подобного утверждения, то они должны быть определены и предъявлены. Да, в каждом возможном мире, в котором истинно A, является истинным это самое A. Достаточно ли этого, чтобы признать, что "A влечет A" (или символически: $A \rightarrow A$)?[10] Любой знающий русский язык с легкостью посчитает истинным высказывание "Автобус идет в Гусь Хрустальный или в Иваново", если автобус идет в один из этих городов. Но кто на этом основании способен сделать заключение, что имеет место логическое следование между соответствующими высказываниями и что здесь действует закон логики вида $A \rightarrow A \vee B$?

Люди начинают рассуждать логически, как и добывать огонь трением, задолго до того, как обнаруживают те законы, в соответствии с которыми их действия приводят к нужным

мир достижим из данного - мы его принимаем в расчет, а если недостижим - то нет Можно,конечно, сказать, что это связано с объективным положением дел Но и проблема "побежал - побежала" тоже из числа объективных, только что это нам даст, если не установить пол зайца заранее?

9 Д.Юм когда-то вполне оправданно утверждал, что никакие ссылки на то, что событие А всегда присходит после события В, не дает права считать эти события причинно или еще как-то связанными. И дело здесь не в том, чтобы отрицать саму объективную возможность такой связи, а в том, что утверждение о ней всегда есть в логическом смысле нечто большее, чем простая фиксация фактического состояния дел. Какие бы ни были у нас эмпирические основания для признания объективного существования такой связи: опыт, повторяемость, возможность воспроизведения и т.п., - такое признание (обоснованное или нет) всегда представляет собой выход за пределы эмпирических знаний. В том по крайней мере смысле, что не может быть из них дедуцирована, так как несет информацию принципиально большую, чем любые такие данные.

10 Один из известных логиков как-то сказал, что утверждающий $A \rightarrow A$ не рассуждает, а заикается.

результатам. Но это как раз и демонстрирует, какая пропасть лежит между эмпирической констатацией и теоретическим осмыслением констатируемых фактов.

Этому соответствует в нашей семантике признание двух типов утверждений об отношениях между высказываниями *A* и *B*. Утверждения первого типа являются эмпирическими (фактуальными). Они вытекают из принятых соглашений об условиях верификации логических констант языка, и говорят о том, что во всяком достижимом мире, где истинно *A*, в силу этих самых соглашений всегда истинно также и *B*. Верность таких утверждений является необходимым, но, естественно, недостаточным условием истинности утверждений второго типа (теоретических) о следовании *B* из *A*. Что же для признания такого *следования* нужно еще? Это теперь и есть тот основной вопрос, на который мы попытаемся удовлетворительно ответить.

В предлагаемой нами семантике S^{ea} никакое утверждение о следовании не может быть беспредпосылочно истинным. Высказывание о следовании является теоретическим. Оно принципиально не может быть обосновано никакими эмпирическими фактами. Теоретическое высказывание может быть обосновано только теоретическими же. И эти последние не могут быть взяты ниоткуда, кроме как постулированы. Для того, чтобы установить, что *A влечет B* в семантике S^{ea} надо убедиться (*и это есть то дополнительное условие, без которого утверждение* $A \rightarrow B$ *не может быть признано истинным*), что в соответствующих мирах (тех мирах, где истинно предложение *A*) предложение *B* не только верифицируется, но и находится на их вторых этажах (в мире следствий).

Наша семантика такова, что ни в каком мире, если о нем нет некоторой информации (какой - мы сейчас скажем), не может быть верифицировано никакое утверждение о следовании вида $A \rightarrow B$, включая любые такого вида теоремы и аксиомы релевантных логических исчислений. Спрашивается будет ли в некотором мире w_i верифицироваться $AB \rightarrow A$? Да, если в каждом достижимом из w_i мире, в котором верифицируется *AB*, на втором этаже есть *A*. Но ему неоткуда там взяться. И ответ - отрицательный. Другое дело, если нам известно, что в мире w_i верифицируется $A \rightarrow A$, тогда на вопрос, верифицируется ли в этом мире формула $AB \rightarrow A$, ответ будет положительный. Ведь условием верификации конъюнкции *AB* является верифицируемость A. Отсюда ясно, что коль скоро в силу верифицируемости $A \to A$ в каждом достижимом мире, где истинно A, на втором этаже также есть A, оно есть также на вторых этажах всех тех достижимых миров, где верифицируется AB.

Выходит мы строим семантику, в которой нельзя верифицировать никакую формулу о следовании? Но ведь любая логическая семантика строится именно для того, чтобы показать, что все теоремы некоторой *логической системы* истинны. Автор это понимает, и конечно же, в семантике S^{ea} это условие будет выполнено. Правда, в отличие от всем привычных семантик трактоваться семантическая истинность будет по иному. Семантически истинной в S^{ea} считаться будет такая формула B (символически, как обычно: $\models B$), которая будет истинной в каждом мире, в котором верифицируется формула $B \to B$. Иначе говоря, выражение $\models B$ представляет собой сокращение для $B \to B \models B$ (при том, что выражение вида $C \models D$ понимается обычным образом как утверждение, что во всяком мире, где истинна формула C, является истинной формула D).

Содержательно предлагаемая трактовка означает, что семантическая истинность какой бы то ни было формулы принципиально не может быть обоснована на чисто эмпирических основаниях. Такая истинность есть следствие некоторых уже принятых постулатов и языковых соглашений, связанных с условиями истинности формул с соответствующими логическими связками. В нашем случае роль постулатов играют утверждения вида $B \to B$. И если B оказывается истинным в каждом мире, в котором постулируется истинность $B \to B$, то B и считается семантически истинным.

Заметим, что в случае, когда само B имеет вид импликации $A \to C$, для верности утверждения $\models A \to C$ достаточно, чтобы во всех мирах, в которых верифицируется A, верифицировалось бы и C. Иными словами, если имеет место $A \models C$, то справедливо и $\models A \to C$ [11]. Мы увидим в дальнейшем, что для обоснования $\models A \to C$ достаточно будет убедиться в верности

---

[11] Таким образом, определение условий истинности утверждений о следовании выглядит практически стандартным. Следует однако иметь в виду, что $\models A \to C$ представляет в нашей семантике сокращение для $A \to C \to . A \to C \models A \to C$ и поэтому верность $A \models C$ не влечет к признанию верности $A \to C$ в каком либо из миров, кроме тех, в которых верифицируется $A \to C \to . A \to C$.

$A \to A \models A \to C$ или $C \to C \models A \to C$. И это обстоятельство естественным образом может трактоваться как тот факт, что утверждения о логическом следовании есть всегда не более, чем ослабления закона рефлексивности, связанные с языковыми соглашениями о смысле (об истинностных взаимоотношениях) соответствующих логических констант и сделанные исключительно на основаниях, разрешенных таковыми соглашениями.

2. Двухуровневая реляционная семантика
(техническое построение и содержательные пояснения)

Язык, для которого мы будем строить семантику, содержит бесконечное число пропозициональных переменных и следующие логические связки: "$\bullet$" - конъюнкцию[12], "$\vee$" - дизъюнкцию, "$\neg$" - отрицание и "$\to$" - (релевантную) импликацию.

Модельная структура представляет собой пару $<W,R>$, где W есть бесконечное множество универсумов рассуждений (миров) $w_1, w_2, \ldots, w_n$, из которых каждый w_i ($i \geq 1$) в свою очередь представляет собой упорядоченную пару $<w_i^a, w_i^e>$. Первый член этой пары (*первый этаж* мира w_i или его атомарная часть, *фактуальный мир*) есть некоторый список *литералов* (пропозициональных переменных или их отрицаний). Требование *полноты*, согласно которому для каждой пропозициональной переменной в атомарный мир входит или сама переменная или ее отрицание, к атомарным мирам не предъявляется. В принципе такой мир может быть даже пустым. Вместе с тем вводится требование *непротиворечивости* атомарных миров: никакая пропозициональная переменная а не может входить ни в какой мир w_i^a одновременно со своим отрицанием[13]

[12] Знак конъюнкции мы нередко опускаем, записывая соединяемые им формулы просто рядом.

[13] Тот факт, что при построении семантики релевантной логики отказываются от принципа полноты, едва ли может вызывать возражения, тем более, если понимать миры как универсумы рассуждения. Даже признавая закон исключенного третьего, мы совсем не обязаны включать в тот или иной универсум одно из противоречащих друг другу высказываний Во всяком случае отказ от принципа полноты имеет резонные оправдания в практике реальных расуждений Но вот с тем, что для корректности рассуждений надо отказываться и от принципа непротиворечия, согласиться трудно. Во всяком случая семантика, которая такой отказ предполагает, должна считаться по крайней мере весьма искусственной. Стоит заметить также, что требование непротиворечивости возможного мира, вообще говоря, совсем не исключает возможности делать предположения о вери-

В свете последних семантических веяний это столь естественное в недавнем прошлом требование может показаться теперь даже неожиданным. Скажем сразу поэтому, что в семантике S^{ea} это требование в чисто техническом смысле не является существенным, так как по причинам, которые будут объяснены ниже, оно не исключает возможности верифицировать противоречивые формулы.

Второй член пары, w_i^e - *второй этаж* мира w_i, называемый также *миром следствий*, есть некоторое множество формул принятого объектного языка. К данному множеству предъявляется только следующее требование конъюнктивной замкнутости:

Если A и B - элементы множества w_i^e, то конъюнкция AB также является его элементом. И, если $(C \rightarrow A)$ и $(C \rightarrow B)$ - элементы множества w_i^e, то к числу его элементов принадлежит и $(C \rightarrow A\,B)$.

Формально:

$(Cl1)$ $\forall w_j\,((A \in w_j^e)\&(B \in w_j^e) \supset (AB \in w_j^e))$.

$(Cl2)$ $\forall w_j\,((C \rightarrow A) \in w_j^e)\&(C \rightarrow B) \in w_j^e) \supset (C \rightarrow AB) \in w_j^e)$.

Наконец R является бинарным (рефлексивным и транзитивным) отношением достижимости на W. При этом выражения Rw_iw_j и $Rw_i^aw_j^a$ рассматриваются как идентичные.

Мы используем выражения $T(A)/w_i$ и $F(A)/w_i$ для утверждений о *верифицируемости* и соответственно о *фальсифицируемости* формулы A в мире w_i[14]. Заметим, что эти утверждения

фикации в нем некоторого противоречивого утверждения. Мы нередко поступаем подобным образом в нашем актуальном мире, отнюдь не считая его противоречивым на самом деле.

[14] В неформальных рассуждениях мы, как уже делали это ранее, будем наряду с утверждениями о верифицируемости и фальсифицируемости формул в некотором мире будем говорить об их истинности (верности), ложности именно в том строгом смысле, какой придается понятиям верифицируемости и фальсифицируемости. Напомним, что под мирами в содержательном смысле у нас имеются в виду универсумы рассуждения Согласитесь, что заявление о том, что в некотором мире истинно противоречие $\neg AA$, выглядит достаточно странно в отличие от утверждения, что в этом универсуме рассуждения верифицируется противоречие $\neg AA$, так как в противоречивости универсумов рассуждения нет ничего странного Скажем, доказательство от противного состоит как раз в том, чтобы показать, что принятие отрицания тезиса влечет противоречие (универсума рассуждения)

будут рассматриваться как совершенно тождественные утверждениям $T(A)/w_i^a$ и $F(A)/w_i^a$ соответственно.

Будут справедливыми также следующие соотношения:

$T(A)/w_i = F(\neg A)/w_i$ и $T(\neg A)/w_i = F(A)/w_i$.

***Определение D1**: В мире w_i^a (и значит в мире w_i) формулы верифицируются исключительно в соответствии со следующими условиями*:

(1) *Если A - пропозициональная переменная или ее отрицание, и A входит в список w_i^a, то $T(A)/w_i$.*[15]

(2) $T(AB)/w_i = T(\mathrm{A})/w_i$ *и* $T(B)/w_i$.

(3) $T(\mathrm{A} \vee B)/w_i = T(\mathrm{A})/w_i$ *или* $T(B)/w_i$.

(4) $T(\neg(A \vee B))/w_i = T(\neg \mathrm{A})/w_i$ *и* $\mathrm{T}(\neg B)/w_i$.

(5) $T(\neg(AB))/w_i = T(\neg A)/w_i$ *или* $T(\neg B)/w_i$.

(6) $T(\neg(A \rightarrow B))/w_i = \exists w_j R w_i w_j \,\&\, T(A)/w_j \,\&\, F(B)/w_j$[16].

Мы продолжим список условий верификации формул после принятия некоторых дополнительных соглашений[17].

С чисто техническими целями введем с помощью подопределения (*SD1*) *внеязыковую* бинарную связку "⇨", которую мы называем *квазиимпликацией*. Заметим, что понятие правильно построенной формулы при этом не изменяется, так как знак квазиимпликации к нашему объектному языку не относится и в формулу объектного языка входить не может.

$$(SD1)\ \ (A \Rightarrow B)/w_i =_{\mathrm{df}} \forall w_j\, (Rw_iw_j \supset (T(A)/w_j \supset T(B)/w_j \& (B \in w_j^e)) \& \\ \& (T(\neg B)/w_j \supset (T(\neg A)/w_j \& (\neg A \in w_j^e)) \& (T(\neg A \vee B)/w_j).$$

Таким образом, выражение (A⇨B) имеет силу[18] в мире w_i, только если во всяком достижимом из w_i мире w_j, в котором верифицируется A, формула B также истинна, и при этом B

---

[15] Обратите внимание, что возможность верифицируемости литерала в wia не исчерпывается его вхождением в w_i^a, некоторый литерал вполне может оказаться верифицируем по иным основанием данного определения. Ниже на эти возможности будет специально указано.

[16] Логические знаки (такие как $\forall$, $\exists$, $\supset$, $\in$, &), связывающие метавыражения и отсутствующие в нашем объектном языке, должны пониматься здесь и в дальнейшем как соответствующие метасимволы.

[17] Эти соглашения доглжны рассматриваться как неотъемлемая составная часть определения D1.

[18] Мы специально не пишем T(A⇨B), так как выражение вида T(A) имеет смысл только при том,что A есть формула объектного языка, а (A⇨B), как было сказано, к таковым не относится.

к тому же находится на его (этого мира) втором этаже w_j^e. То же самое имеет место в отношении формул $(\neg B)$ и $(\neg A)$: во всяком достижимом из w_i мире w_j, в котором верифицируется $(\neg B)$, формула $(\neg A)$ также истинна и входит в w_j^e. Выражения $(A \Rightarrow B)$ и $(\neg B \Rightarrow \neg A)$ поэтому являются по определению эквивалентными.

На отношение достижимости R налагаются ограничения:

Rstr 1. $(A \Rightarrow B)/w_i \;\&\; \forall C\, \forall w_j\, (Rw_iw_j \supset (F(C \to B)/w_j \supset \supset \neg(C \to A) \in w_j^e)) \supset ((C \to A) \Rightarrow (C \to B))/w_i)$.

Rstr 2. $(\forall C\, ((C \to A) \Rightarrow (C \to B))/w_i \supset \forall D\, ((D \to .\, C \to A) \Rightarrow (D \to . \to .\, C \to B))/w_i$[19].

Продолжим теперь список условий, в соответствии с которыми верифицируются формулы:

(7) $T(A \to B)/w_i = T(\neg B \to \neg A)/w_i = (A \Rightarrow B)/w_i \;\&\; \forall C\, ((C \to A) \Rightarrow \Rightarrow (C \to B))/w_i$[20]

---

[19] Об этих ограничениях имеет смысл сказать более подробно. Ниже следующий и фактически основной для нашей семантики пункт (7) из *D1* определяет истинность $(A \to B)$ в мире w_i как конъюнкцию выражений $(A \Rightarrow B)/w_i$ и $\forall C((C \to A) \Rightarrow (C \to B))/w_i$. О том почему нельзя ограничиться только первым членом конъюнкции еще будет сказано ниже. Но вот почему мы вынуждены задавать дополнительно некоторые условия истинности второго члена этой конъюнкции, а не используем его сразу? Теоретически такая возможность не исключается. Это требует однако весьма пространных и сложных объяснений, связанных с тем, что для понимания $\forall C((C \to A) \Rightarrow (C \to B))/w_i$ в соответствии с *SD1* нужно знать смысл выражений вида $T(C \to A)/w_j$ и $T(C \to B)/w$, которые пока еще не определены. Чтобы обойти указанную трудность и избежать круга в определении, мы используем тот факт, что являющееся частью *Rstr1* утверждение $\forall C \forall w_j (Rw_iw_j \supset (F(C \to B)/w_j \supset \neg(C \to A) \in w_j^e))$ {обозначим его как φ} является необходимым условием истинности утверждения $\forall C((C \to A) \Rightarrow (C \to B))/w_i$. (Действительно, последнее, как мы знаем, эквивалентно $\forall C(\neg(C \to B) \Rightarrow \neg(C \to A))/w_i$, а у него условием истинности (по *SD1*) является $\forall C \forall w_j (Rw_iw_j \supset (T\neg(C \to B) \supset \neg(C \to A) \in w_j^e))$, что эквивалентно обсуждаемому утверждению φ из *Rstr 1*). Утверждение φ не содержит неизвестных символов и вместе с $(A \Rightarrow B)/w_i$ в силу ограничения *Rstr 1* дает требуемый результат. Ограничение *Rstr 2* носит ясный технический характер. Если утверждение вида $((C \to A) \Rightarrow (C \to B))/w_i$ является верным для любого C, то естественно считать таковым и всякое утверждение $(D \to C \to A) \Rightarrow (D \to .\, C \to B)$ и тому подобное с последовательностью одинаковых итерированных антецедентов. Ограничение *Rstr 2* задает это условие индуктивно.

[20] Обращаем специальное внимание на то, что в пункте (7) несмотря на то, что в определяющей части содержится выражение $\forall C((C \to A) \Rightarrow (C \to B))/wi$, нет круга в определении. Объяснение этому фактически дано

(8) *Если* $T((A_1 \to B_1)(A_2 \to B_2) \to C)/w_i \,\&\, \forall w_j\, ((T(A_1)/w_j \supset$
$\supset T(B_1)/w_j) \,\&\, (T(A_2)/w_j \supset T(B_2)/w_j))$, *то* $T(C)/w_i$[21].

Определение условий верификации формул завершено, и можно сделать некоторые пояснения. Обратим прежде всего внимание на то обстоятельство, что можно вести речь о верифицируемости и фальсифицируемости формулы в некотором мире w_i или в его атомарной части, но не в мире следствий. В последний формулы могут только входить или не входить.

Пропозициональная переменная или же ее отрицание могут верифицироваться в мире w_i^a также и при отсутствии их в соответствующем списке w_i^a литералов. Так, например, в случае верности в w_i^a импликации $p \to q$ и ее антецедента p в этом мире в силу условий верификации $p \to q$ будет верифицироваться q независимо от того входит ли q в список w_i^a или же нет.

Указанное обстоятельство открывает возможность верифицировать в атомарных мирах противоречивые формулы несмотря на предъявляемое к этим мирам требование непротиворечивости относительно непосредственно входящих в них литералов. Верная импликация $p \to q$ (при верности p) может

уже в предшествующем примечании. Заметим тем не менее, что пункт (7) может быть принят в следующем эквивалентном имеющемуся виде:
(7*) $T(A \to B)/wi = T(\neg B \to \neg A)/wi = (A \Leftrightarrow B)/wi \& \forall C \forall wj(Rwiwj \supset (F(C \to B)/wj \supset$ $\supset \neg(C \to A) \in wje))$, в котором очевидно нет никакого круга и из определяющей части которого в соответствии с ограничением Rstr I вытекает определяющая часть пункта (7). Вообще говоря, пункт (7) утверждает следующее: если $A \to B$ признается истинным в некотором мире, то это вынуждает признать истинными в этом мире также $\neg B \to \neg A$ и $(C \to A) \to (C \to B)$. Если же требуется обосновать истинность $A \to B$ в соответствующем мире, то следует показать, что в этом мире имеют силу $(A \Leftrightarrow B)/w_i$ и $\forall C((C \to A) \Leftrightarrow (C \to B))/w_i$. Отметим, что верность утверждения $\forall C((C \to A) \Leftrightarrow (C \to B))/w_i$ в силу ограничения *Rstr 2* влечет для любого C справедливость $T((C \to A) \to (C \to B))/w_i$ Если предположить, что последнее может быть верным, по-видимому, только в случае верности $A \to B$, то, по-видимому, возникает интересная, но не исследованная нами, возможность определить $T(A \to B)/w_i$ как $\forall C((C \to A) \Leftrightarrow (C \to B))/w_i$, и, значит, как $\forall C \forall w_j\ (Rw_iw_j \supset (F(C \to B)/w_j \supset \neg(C \to A) \in w_j^e))$

21 Пункт (8) позволяет считать верифицированной в соответствующем мире любую формулу C, из истинной в этом мире импликации $D \to C$, антецедент которой D представляет собой конъюнкцию релевантных импликаций (в частном случае это может быть одна такая импликация) вида $A \to B$, где B - формула истинна во всех тех мирах, где истинно A. Иначе говоря, формула, которая в некотором мире следует из семантически истинных импликаций, сама в этом мире истинна.

обеспечить верифицируемость своего консеквента в мире, где верифицируется его отрицание. да и сам консеквент может изначально быть противоречивым, т.е. импликация может иметь вид сразу $p \to q \bullet \neg q$

Дизъюнкция $p \vee q$ может верифицироваться мире, в котором нельзя верифицировать ни p, ни q. Так в случае верности в мире w_i импликации $\neg p \to q$ указанная дизъюнкция является истинной во всех достижимых из w_i мирах, причем это означает, что во всех этих мирах истинно p или истинно q, но не обязательно известно, какое именно.

Утверждение об импликативной связи (логической или онтологической) не может быть обосновано никаким фактическим положением дел. Такого рода связь между некоторыми высказываниями (событиями) может быть только постулирована[22]. Заметим, что и в тех случаях, когда речь идет об импликации между двумя импликациями же, истинность первой из которых детерминирует истинность второй, мы все равно не имеем ее (этой импликации импликаций) верифицируемости во всех мирах. Так, в силу *D1* во всех мирах, где верно $A \to B$ будет верифицироваться $C \to A \to . C \to B$. Но сам принцип транзитивности $A \to B \to . C \to A \to . C \to B$, как и любой иной логический принцип, верифицировать во всех мирах не удастся[23]. Собственно это обстоятельство и является сердцевиной и принципиальной особенностью предлагаемой семантики.

Требование, согласно которому квазиимпликация должна иметь место при верификации $A \to B$ в соответствующем мире не только между A и B, но и между формулами $(C \to A)$ и $(C \to B)$, где C - произвольная формула, по виду своему является чисто экстенсиональным. Но в силу того, что число формул, которые могут ставится на место C бесконечно, нет никакой возможности реализовать это требование именно

---

[22] В силу этого обстоятельства мы рассматриваем предлагаемую семантику как семантику юмовского, а не лейбницевского типа, где логические истины рассматриваются как истины во всех возможных мирах В семантике Sea нет никаких истинных во всех мирах утверждений помимо тех, истинность которых является следствием явно принятых постулатов Подробнее смотри об этом в [4].

[23] Мы можем доказать, что во всех мирах имеет силу метаутверждение $A \to B \supset C \to A \to C \to B$ и на этом основании говорить о семантической истинности $A \to B \to C \to A \to C \to B$, но это не то же, что истинность во всех мирах

чисто экстенсиональным путем. Таким образом, экстенсиональное требование обеспечивает в нашей семантике интенсиональность в понимании следования. Дело в том, что для произвольного C обосновать $((C \to A) \Rightarrow (C \to B))/w_i$ принципиально возможно только при справедливости $T(A \to B)/w_i$.

Семантическое замыкание класса формул, верифицируемых в *атомарных мирах* (*на первых этажах*) осуществляется за счет условий верификации формул. На вторых этажах формулы не верифицируются, они туда лишь входят, и поэтому на проблему семантической замкнутости вторых этажей приходится специально обращать внимание. Ведь совсем не факт, что в случае нахождения на втором этаже формулы C там будет находиться также и $C \vee C$.

Требуемое замыкание осуществляется за счет пункта (8) из $D1$. Действительно, при верности $A \to B$ в некотором мире w_i в этом же мире верифицируется $B \to C \to . A \to C$, где C есть некоторое семантическое следствие из B и значит имеет силу $\forall w_i\, (T(B)/w_i \supset T(C)/w_i$. Из $B \to C \to . A \to C$ и названного пункта (8), позволяющего устранить $B \to C$, получаем утверждение о верности в формулы $A \to C$

3. Семантика системы E

При построении семантики следования мы исходили из некоторого интуитивного его понимания. Мы можем теперь показать, что семантика S^{ea} адекватна известной релевантной системе E, которая принимается здесь в следующей формулировке:

Аксиомы E:

A1. $(A \to A)(B \to B) \to C \to C$ A2. $A \to B \to . B \to C \to . A \to C$

A3. $A \to B \to . C \to A \to . C \to B$ A4. $(A \to . A \to B) \to A \to B$

A5. $AB \to A$ A6. $AB \to B$

A7. $(A \to B)(A \to C) \to . A \to BC$ A8. $A \to A \vee B$

A9. $B \to A \vee B$ A10. $(A \to C)(B \to C) \to . A \vee B \to C$

A11. $A(B \vee C) \to AB \vee C$ A12. $A \to B \to . \neg B \to \neg A$

A13. $A \neg B \to \neg(A \to B)$ A14. $A \to \neg\neg A$

A15. $\neg\neg A \to A$

Правила вывода E:

*R*1. *Из* $A \to B$ и *A следует B* (*Modus ponens*, *MP*).

*R*2. *Из A и B следует* $A \bullet B$ (*Правило адъюнкции*).

Как уже отмечалось, никакая формула A не является в семантике S^{ea} ни тождественно истинной, ни тождественно ложной в том смысле, что всегда найдутся миры, в которых A не верифицируется, а значит, и такие в которых A не фапьсифицируется. Это относится, очевидно, и ко всем аксиомам и теоремам системы E. В связи с этим, чтобы иметь возможность говорить о семантической истинности теорем E, вводится специальное понимание семантической истинности.

Определение D2. *Некоторая формула B называется семантически истинной в семантике* S^{ea} *(символически*: $\models B$*), если и только если во всяком мире* w_i*, в котором верифицируется* $B \to B$*, верифицируется B. Или формально*:

$$\models B =_{\mathrm{df}} \forall w_i (T(B \to B)/w_i \supset T(B)/w_i).$$

Лемма 1. *Если* $\forall w_i (T(A \to A)/w_i \supset T(B)/w_i$*, то* $\models B$.

Справедливость леммы вытекает из следующих утверждений, верных для любого мира w_i:

$$(T(A \to A)/w_i \supset T(B)/w_i \quad (1)$$

$$T(B \to B)/w_i \supset T((A \to A) \to B \to .(A \to A) \to B)/w_i \quad (2)$$

$$T(B \to B)/w_i \supset T((A \to A) \to B)/w_i \quad (3)$$

$$T((A \to A) \to B)/w_i \supset T(B)/w_i \quad (4)$$

$$T(B \to B)/w_i \supset T(B)/w_i \quad (5)$$

Утверждение (1) очевидно берется как посылка. (2) является верным в силу транзитивности релевантной импликации. Утверждение (3) вытекает из (2) и (1) в соответствии с пунктом (8) определения *D1*. На основании этого же пункта является верным (4).Наконец (5) получается по транзитивности из (3) и (4). *Лемма* доказана.

Покажем, что все доказуемые в системе E формулы являются в S^{ea} семантически истинными в смысле D2.

Метатеорема MT1. *Если формула B есть теорема системы E, то* $\models B$ в S^{ea}.

Начнем с доказательство с констатации следующего факта. Если формула имеет вид импликации $A \to B$, то для того, чтобы убедиться в ее семантической истинности достаточно показать, что B верифицируется во всех мирах в которых верифицируется A. Действительно, если дело обстоит указанным образом, то утверждение о семантической истинности $A \to B$ получается из $A \to B \to . A \to B$ немедленно в силу пункта (8) определения *D1*.

Приведем формальное доказательство соответствующего этому факту утверждения в качестве соответствующей леммы.

***Лемма 2**: Если* $\forall w_i (T(A)/w_i \supset T(B)/w_i)$, *то* $\models A \to B$.

Доказательство. $\forall w_i\, (T((A \to B) \to (A \to B))/w_i \supset T(A \to B)/w_i)$ и, следовательно, $\models A \to B$ получается из очевидного для всякого w_i

$$T((A \to B) \to (A \to B))/w_i \supset T((A \to B) \to (A \to B))/w_i$$

и антецедента леммы $\forall w_i\, (T(A)/w_i \supset T(B)/w_i)$ в силу (8) из *D1*.

Заметим вместе с тем, что если не удается доказать, что во всех мирах, в которых верифицируется A, также верифицируется и B, то это отнюдь еще не означает, что соответствующая импликация $A \to B$ не является семантически истинной. В качестве примера укажем на контрапозицию аналитической записи принципа MP: $\neg B \to \neg((A \to B)A)$.[24]

Это лишь одна из причин, по которой определение семантической истинности принимается в соответствии с *D2*. Другая причина связана с тем, что семантически истинные формулы не обязательно имеют вид импликации. Вместе с тем, учитывая, что все аксиомы системы E имеют именно такой вид, мы для доказательства их семантической истинности будем использовать указанный выше прием, тем более, что он оказывается пригодным для всех аксиом системы.

Семантическая истинность аксиомы $(A \to A)(B \to B) \to C \to C$ (A1) немедленно вытекает из пункта (8) определения. Если в некотором мире верифицируется антецедент этой аксиомы

---

[24] Действительно тот факт, что в данном мире верифицируется $\neg B$, не означает, что в этом мире фальсифицируется конъюнкция $(A \to B)A$. Во-первых, формула A может оказаться в нем неопределенной, т.е. ни верифицироваться, ни фальсифицироваться. Во-вторых, нет никаких оснований считать, что в числе миров, достижимых из данного, непременно найдется такой мир, что A в нем верифицируется, а B фальсифицируется, как это требуется для фальсификации $(A \to B)$, являющегося вторым членом конъюнкции

$(A \to A)(B \to B) \to C$, то в нем в соответствии с указанным пунктом будет верифицироваться и ее консеквент C.

По причине, которая станет ясной ниже, мы обратимся прежде к аксиоме $A \to B \to .C \to A \to .C \to B$ (А3), а затем уже вернемся к А2, выражающей другой принцип транзитивности. Легко увидеть, что в аксиоме А3 верифицируемость ее консеквента $C \to A \to .C \to B$ является в соответствии с пунктом (7) определения $D1$ условием верифицируемости ее антецедента $A \to B$, так как последний не может быть верифицирован, если для любого C не имеет силы $(C \to A) \Rightarrow (C \to B)$, а значит и $(C \to A) \to (C \to B)$. Таким образом, аксиома А3 - семантически истинна.

Для доказательства семантической истинности $A \to B \to .B \to C \to .A \to C$ (А2), достаточно воспользоваться фактом семантической истинности А3 и тем, что выражения вида $A \to B$ и $\neg B \to \neg A$ у нас по определению идентичны. В соответствии с (А3) мы имеем семантически истинную формулу $\neg B \to \neg A \to .\neg C \to \neg B \to .\neg C \to \neg A$. Из нее эквивалентными заменами $\neg B \to \neg A$, $\neg C \to \neg B$ и $\neg C \to \neg A$ на $A \to B$, $B \to C$ и $A \to C$ соответственно получаем требуемую аксиому А2 .

Обратимся теперь к аксиоме $(A \to .A \to B) \to .A \to B$ (А4). Условием верификации антецедента этой аксиомы, т.е. $A \to .A \to B$, в некотором мире w_i является верифицируемость $A \to B$ в каждом достижимом из w_i мире w_j, где верно A. И это условие согласно пункту (7) определения $D1$ выполняется, когда имеют силу утверждения $(A \Rightarrow B)/w_j$ и $\forall C\, ((C \to A) \Rightarrow (C \to B))/w_j$.

Эти два последних в свою очередь являются верными, когда в каждом достижимом из каждого мира w_j мире w_k, в котором истинно A, между A и B и между $C \to$A и C $\to B$ имеются отношения, указанные в подопределении ($SD1$). Однако, каждый такой мир w_k в силу рефлексивности и транзитивности отношения достижимости R есть всегда достижимый из w_i мир w_j, в котором истинно A. Можно утверждать поэтому, что истинность антецедента аксиомы А4 $(A \to .A \to B)$ в w_i предполагает верность $(A \Rightarrow B)/w_i$ и $\forall C\, ((C \to A) \Rightarrow (C \to B))/w_i$. Этого достаточно, чтобы признать в w_i верным также и консеквент нашей аксиомы $A \to B$.

Что касается аксиом $AB \to A$ (А5), $AB \to B$ (А6), $A \to A \vee B$ (А8), $B \to A \vee B$ (А9), то их семантическая истинность вытекает из соответствующих условий верификации конъюнкции и дизъюнкции и поэтому очевидна.

Семантическая истинность $(A \to B)(A \to C) \to .A \to B\,C$ (A7) вытекает из условий ($Cl1$) и ($Cl2$) конъюнктивной замкнутости мира следствий (второго этажа) каждого из миров).

Аксиома $(A \to C)(B \to C) \to .A \vee B \to C$ (A10) за счет принципов контрапозиции и законов де Моргана сводится к A7 и является в связи с этим также семантически истинной.

Семантическая истинность всех остальных аксиом

A11-A15: $A(B \vee C) \to AB \vee C$, $A \to B \to .\neg B \to \neg A$,

$A \neg B \to \neg(A \to B)$, $A \to \neg\neg A$, и $\neg\neg A \to A$ очевидна.

Все аксиомы системы E семантически истинны, и значит каждая аксиома Ai ($i \leq 15$) верифицируется во всех тех мирах, в которых верифицируется $Ai \to Ai$. Для завершения доказательства теоремы $MT1$ достаточно показать, что имеющиеся в системе E правила вывода сохраняют для теорем это свойство в силе. Это означает, что для MP надо убедиться, что в случае, если во всяком мире, в котором верифицируется $A \to B \to .A \to B$, верифицируется $A \to B$, и если во всяком мире, в котором верифицируется $A \to A$, верифицируется A, тогда во всяком мире, если в нем верифицируется $B \to B$, то в нем верифицируется B. Формально:

$$(T(A \to B \to .A \to B)/w_i \supset T(A \to B)/w_i)\ \&\ (T(A \to A)/w_i \supset T(A)/w_i) \supset .$$
$$\supset . T(\mathrm{B} \to B)/w_i \supset T(B)/w_i\ .$$

Покажем, что приведенное утверждение действительно справедливо. В мирах, в которых верифицируется $A \to B \to .A \to B$, а значит и $A \to B$, будет по транзитивности верной формула $(A \to A) \to A \to .(A \to A) \to B$. В силу семантической истинности формулы A и пункта (8) определения $D1$ в тех же мирах верифицируется $(A \to A) \to B$, а значит и формула B. А это в силу *Леммы 1* означает, что B верифицируется во всех тех мирах, где верифицируется $B \to B$.

Для правила адъюнкции надо показать, что в случае верности утверждений $T(A \to A)/w_i \supset T(A)/w_i$ и $T(B \to B)/w_i \supset T(B)/w_i$ будет иметь силу также и $T(AB \to AB)/w_i \supset T(AB)/w_i$. Применение *Леммы 1*, как и в случае с MP делает эту задачу несложной. Обозначим как C конъюнкцию $(A \to A)(B \to B)$ и заметим сразу, что для любого w_i в силу ее семантической истинности верно $T(C \to C)/w_i \supset T(C)/w_i$. Предполагая верным $AB \to AB$ в некотором мире w_i, имеем в нем по транзитивности $C \to AB \to . C \to AB$. И так как посылки, к которым применяется обсуждаемое правило вывода, позволяют считать в каждом мире верным $C \supset AB$, в соответствии с пунктом (8) из *D1* получаем, что в w_i верно $C \to AB$. И так как справедливо $T(C \to C)/w_i \supset T(C)/w_i$, имеет силу $T(C \to C)/w_i \supset T(AB)/w_i$. Что и дает по *Лемме 1* нужное нам утверждение $T(AB \to AB)/w_i \supset T(AB)/w_i$.

Перейдем теперь к следующему важному шагу и покажем, что любая семантически истинная формула является теоремой системы *E*.

Метатеорема МТ2 (*Теорема полноты*). *Если B является семантически истинной формулой в семантике S^{ea}, то B есть теорема системы E. Более формально:*

$$\text{Если} \models B \text{ в } S^{ea}, \text{ то} \vdash B \text{ в } E.$$

Стратегия доказательства состоит в том, чтобы показать, что утверждение вида

$$\forall w_i \ (T(A \to A)/w_i \supset T(B)/w_i) \qquad (1)$$

является верным только в случае, когда *B* есть теорема системы *E*. И так как в соответствии с *Леммой 1* утверждение (1) равносильно утверждению о семантической истинности *B*, этого будет достаточно для доказательства М*Т*2.

Поскольку никакая формула не верифицируется во всех мирах без некоторой предпосылки, очевидно, что (1) может оказаться верным только в случае, когда *B* получается из $A \to A$ в силу некоторых допустимых семантических преобразований, которые определяются семантическими свойствами связок. Такие преобразования, могут быть осуществлены исключительно в силу определения *D1*.

Первые пять пунктов определения *D1* относятся к *классическим* связкам, носят стандартный характер, и их применение для семантических преобразований исходной формулы всегда будет обеспечивать переход от любой теоремы *E* к теореме же. Пункт (6) позволяет считать $\neg(A \to B)$ семантическим ослаблением $A \neg B$, чему в *E* соответствует теорема $A \neg B \to \neg(A \to B)$, и поэтому преобразования, осуществляемые с использованием этого пункта, также оставляют теорему системы *E* ее теоремой.

В соответствии с пунктом (7) определения *D1* семантическим эквивалентом формулы $A \to B$ является $\neg B \to \neg A$, а их семантическими ослаблениями $\neg A \vee B$ и любые формулы вида

$(B \to C) \to .(A \to C)$, $(C \to A) \to (C \to B)$. Очевидно, что во всех случаях связанные с этими свойствами трансформации любой теоремы E приводят к новой теореме этой системы.

Наконец пункт (8) из *D1* позволяет преобразовать в C любую формулу вида $D \to C$, где D есть конъюнкция семантически истинных импликаций. Так как при верности $D \to C$ в этом случае всегда верно также $D \to D \to C$, то это равносильно разрешенному в системе E переходу от $D \to D \to C$ к C .

Никаких иных семантических преобразований стоящей в антецеденте (1) формулы $A \to A$ кроме названных осуществить нельзя. И так как $A \to A$ есть теорема системы E , то любая формула B , получающаяся в результате этих преобразований , также будет всегда теоремой этой системы.

Таким образом, теорема о семантической полноте системы E доказана.

Из *MT1* и *MT2* немедленно следует теорема адекватности:

Метатеорема MT3. *Утверждение $\models B$ верно в семантике S^{ea}, если и только если $\vdash B$ в системе E .*

Заметим в заключение, что что предложенная семантика S^{ea} может быть адаптирована к другим релевантным системам, способами более удачными в смысле семантичности, чем это имеет место в [3]. Семантика S^{ea} позволяет также увидеть возможности усиления E, без нарушения принципов релевантности и самого духа этой системы. В частности, выявить класс верных в NR, но не в E, принципов и расширить E таким образом, чтобы E-следование совпало с необходимой импликацией из NR. Сама система NR также допускает релевантные расширения [7], которые имеют соответствующую семантическую интерпретацию. Особый интерес вызывают возможные расширения E и NR и NR (но не R , у которого таких расширений нет [19]) за счет принципов, аналоги которых неприемлемы в классической логике.

Литература

1. *Sidorenko E.A.* Relational semantics of entailment.- XIX World Congress of Philosophy, Moscow, 22-28 August 1993, Book of Abstracts, v.1.
2. *Сидоренко Е.А.* Релевантная реляционная семантика с двумирными точками соотнесения. - Труды научно-исследовательского семинара логического центра Института философии РАН, 1993. М.,1994.

3. *Сидоренко Е.А.* Реляционная семантика релевантных исчислений. Логические исследования, вып. 3. М., Наука, 1995, с.53-71.
4. *Сидоренко Е.А.* Семантика возможных миров: от лейбницевской к юмовской - Логические исследования, вып.3.М.,Наука, 1995, с. 24-37
5. *Anderson A.R ., Belnap N.D.* Entailment, v.1, Princeton, 1972.
6. *Routly R ., Meyer R .* The Semantics of Entailment. — Truth, Syntax and Modality (ed. by H.Leblanc). Amsterdam — 1973, p. 199—243.
7. *Сидоренко Е.А.* Логическое следование и условные высказывания. М., 1983, Наука, с. 173
8. *Войшвилло Е.К.* Философско-методологические аспекты релевантной логики.М., Изд-во МГУ, 1988.
9. *Vasyukov V.L.* From ternary to tetrary. - Bulletin of the Section of Logic, 23 (1994), pp. 163-167.
10. *Смирнова Е.Д.* Логическая семантика и философские основания логики. -М., Изд-во МГУ, 1986, 161 с.
11. *Lewis C. I.* A survey of symbolic logic. Berkeley, 1918.
12. *Prior A.N.* Formal logic. Oxford, 1955
13. *Зиновьев А.А.* Логика высказываний и теория вывода. М., 1962.
14. *Сидоренко Е.А.* Е-системы и их непротиворечивые расширения за счет классически неприемлемых принципов. - Релевантные логики и теория следования. М., Наука, 1979, с. 100-108.
15. *Смирнов В.А.* Формальный вывод и логические исчисления. - М., Наука, 1972.
16. *Карпенко А.С.* Фатализм и случайность будущего. Логический анализ. М. Наука, 1990.
17. *Быстров П.И.* Релевантные системы с глобальными правилами вывода. - Логические исследования, вып. 2 М., Наука, 1993.
18. *Герасимова И.А.* Дилемма экстенсиональности-интенсиональности и контексты с пропозициональными установками. - Логические исследования, вып. 2. М.,Наука, 1993.
19. *Maksimowa L.* A semantics for the calculus E of entailment. - Bulletin of the section of logic. 1973, v.2, N.1, Wroclaw).

А.С.Карпенко, В.И.Шалак

Минимальные модели для нечеткой алгебры типа 2

С выходом в 1965 г. статьи Л. Заде "Нечеткие множества" [12] начинается исключительно бурное развитие новой теории, предназначенной для изучения и анализа систем, в которых основная роль принадлежит суждениям и решениям человека. Поскольку эти системы связаны с принципиально нечетким (размытым, расплывчатым) характером человеческой психики, то сама новая теория получила название "теории нечетких множеств", являющейся обобщением обычной (четкой) теории множеств. Хорошим введением в теорию нечетких множеств является монография А. Кофмана [4].

Исходным понятием обычной теории множеств является понятие принадлежности $x \in A$ элемента x некоторого множества X к определенному подмножеству $A \subset X$. Для выражения этой принадлежности можно использовать и другое понятие - характеристическую функцию $\mu_A(x)$, значение которой указывает, является ли (да или нет) x элементом A:

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 1, \text{ если } x \in A, \\ 0, \text{ если } x \notin A. \end{cases}$$

Однако, как раз в гуманитарных науках это понятие принадлежности оказалось недостаточным для рассмотрения ситуаций, которые описываются с помощью нечетко определенных понятий типа "множество высоких людей", "множество хороших логиков", "множество чисел много больше 10", и т.д. Здесь дихотомия рассмотренной функции принадлежности не позволяет любому элементу или принадлежать, или не принадлежать данному множеству. Таким образом, дихотомия функции принадлежности должна быть отвергнута точно так же, как Я. Лукасевич отверг дихотомию функции приписывания истинностных значений (принцип бивалентности). Тогда, следуя Заде, в основе теории нечетких множеств лежит представление о том, что составляющие множество элементы, обладающие общим свойством, могут обладать этим свойством в различной степени и, следовательно, принадлежать данному множеству с различной степенью. При таком подходе высказывание типа "элемент принадлежит данному множеству А" теряет смысл, поскольку необходимо указать, с какой степенью элемент принадлежит данному множеству. Это множество степеней принадлежности может оцениваться на бесконечной шкале действительных (или рациональных) чисел от 0 до 1, или на части чисел интервала [0,1], в том числе и конечной шкале. Например, объект, определяемый выражением А = $\{(x_1|0,2), (x_2|0), (x_3|0,3), (x_4|1), (x_5|0,8)\}$, где x_i - элемент универсального множества X, а число после вертикальной черты дает значение характеристической функции на этом элементе, будем называть *нечетким подмножеством множества* X. Следовательно, рассмотренное нечеткое подмножество А содержит в небольшой степени x_1, не содержит x_2, содержит x_3 в немного большей степени, чем x_2, полностью содержит x_4, и в значительной степени x_5. Итак, А является нечетким подмножеством, если там имеется по крайней мере один элемент x, который принадлежит А со степенью отличной от 1.

Дадим строгое определение понятия нечеткого множества. Пусть X - множество, счетное или нет, и x - элемент X. Тогда нечеткое подмножество А множества X определяется как множество упорядоченных пар $\{(x, \mu_A(x))\}$ для всякого $x \in X$, где $\mu_A(x)$ - *характеристическая функции принадлежности*, принимающая свои значения во множестве M (у Заде M есть интервал [0,1]), которая указывает степень принадлежности элемента x подмножеству А. Если M = {0,1}, то "нечеткое подмножество" становится "четким", обычным подмножеством. Таким образом, нечеткое подмножество является обобщением обычного подмножества.

Пример. Пусть N - множество натуральных чисел: {0, 1, 2, ...}. Рассмотрим нечеткое подмножество "небольших" натуральных чисел: А = {(0|1), (1|0,8), (2|0,6), (3|0,4), (4|0,2), (5|0), ...}. Здесь функциональные значения $\mu_A(x)$, где x = 0, 1, 2, ..., задаются, конечно, субъективно. Таким образом, 0 полностью принадлежит А, 1 принадлежит А со степенью 0,8, и т.д.

Определим простейшие операции пересечения $\cap$, объединения $\cup$ и дополнения $^{-}$ над нечеткими подмножествами. Пусть X - множество и А и В два нечетких подмножества X. Тогда для всякого $x \in X$:

$$\mu_{A \cap B}(x) = \min(\mu_A(x), \mu_B(x)),$$

$$\mu_{A \cup B}(x) = \max(\mu_A(x), \mu_B(x)),$$

$$\mu_{-A}(x) = 1 - \mu_A(x),$$

$$A = B, \text{ если } \mu_A(x) = \mu_B(x).$$

Как известно, обычная теория множеств и законы классической логики являются примерами моделей, удовлетворяющих булевой алгебре. Возникает вопрос, моделями какой алгебры является теория нечетких множеств и нечеткая логика? Легко показать, что нечеткой алгеброй является квази-булева алгебра [11], или, по-другому, дистрибутивная решетка без дополнений, т.е. булева алгебра без закона исключенного третьего $(A \cup -A) = 1$ (и, соответственно, без закона непротиворечия $-(A \cap -A) = 1$). Например, пусть $A = \{(x_1|0,2), (x_2|0,7), (x_3|1), (x_4|0)\}$. Тогда $-A = \{(x_1|0,8), (x_2|0,3), (x_3|0), (x_4|1)\}$. Отсюда, $A \cup -A = \{(x_1|0,8), (x_2|0,7), (x_3|1), (x_4|1)\}$, т.е. $A \cup -A \neq 1$. Однако имеется существенное уточнение в [9], что нечеткая алгебра есть алгебра Клини, которая получается посредством добавления к квази-булевой алгебре закона Клини, где последний есть ослабленное условие закона исключенного третьего:

$$(A \cap -A) \cup (B \cup -B) = B \cup -B.$$

Важнейшей моделью нечеткой алгебры является трехзначная логика Клини $\mathbf{K_3}$ [3, § 64].

Приведем нужное нам определение булевой алгебры.

Непустое множество L с двумя бинарными операциями $\vee$ (дизъюнкция) и $\wedge$ (конъюнкция) на L называется *решеткой*, если L удовлетворяет следующим тождествам:

I. (a) $x \vee x = x$

(b) $x \wedge x = x$ (идемпотентность)

II. (a) $x \vee y = y \vee x$

(b) $x \wedge y = y \wedge x$ (коммутативность)

III. (a) $x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z$

(b) $x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z$ (ассоциативность)

IV. (a) $x \vee (x \wedge y) = x$

(b) $x \wedge (x \vee y) = x$ (поглощение).

Непустое множество L называется *квази-решеткой* [10], если выполняются только тождества (I) - (III).

Решетка L называется *дистрибутивной*, если выполняются законы дистрибутивности:

V. (a) $x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$

(b) $x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$.

Решетка L с двумя нульарными операциями 0 и 1 называется *ограниченной*:

VI. (a) $x \vee 0 = x$

(b) $x \wedge 1 = x$.

VII. (a) $x \vee 1 = 1$

(b) $x \wedge 0 = 0$

Ограниченные решетки обычно называются алгебрами. Тогда ограниченная дистрибутивная решетка $<L, \vee, \wedge, \sim, 0, 1>$ с отрицанием де Моргана:

VIII. $\sim\sim x = x$

IX. $\sim(x \vee y) = \sim x \wedge \sim y$

X. $\sim(x \wedge y) = \sim x \vee \sim y$.

называется *квази-булевой алгеброй* [11], или *алгеброй де Моргана.*

Алгебра $<L, \vee, \wedge, \sim, 0, 1>$ называется *булевой алгеброй*, если $< L, \vee, \wedge, 0, 1 >$ есть ограниченная дистрибутивная решетка и выполняются следующие два тождества:

(B1). $x \vee \sim x = 1$

(B2). $x \wedge \sim x = 0$.

Теперь перейдем к главному. В связи с идеями Л. Заде [2], что само понятие *Истинности* является нечетким, в рассмотрение вводятся нечеткие подмножества с нечеткими функциями принадлежности, т.е., если А - нечеткое подмножество универсального множества X, то значениями функций принадлежности могут быть нечеткие подмножества из интервала [0,1]. Чтобы отличить такие нечеткие подмножества от нечетких подмножеств, рассмотренных ранее, будем называть их *нечеткими подмножествами типа 2.* Более строго: нечеткое подмножество А типа 2 в X есть нечеткое подмножество, которое характеризуется нечеткой функцией принадлежности $\mu_A(x)$ как

$$\mu_A(x): X \to [0,1]^j,$$

где значение $\mu_A(x)$ называется нечеткой степенью и является нечетким подмножеством в [0,1]. Обычно в качестве j берется также [0,1]. Тогда, если нечеткое подмножество типа 1 характеризуется функцией принадлежности $\mu_A(x): X \to [0,1]$, то нечеткое подмножество типа 2 характеризуется функцией принадлежности $\mu_A(x): X \to \mathcal{F}([0,1])$, где $\mathcal{F}([0,1]) = \{f: [0,1] \to$

[0,1]}. По аналогии с этим определяются нечеткие подмножества типа 3, 4 и т.д.

Именно нечеткие подмножества типа 2, т.е. элементы множества $\mathcal{F}([0,1])$, и выступают в качестве истинностных значений в нечеткозначной логике, понятие которой было введено Р. Беллмэном и Л. Заде в [7].

Как хорошо известно, структурой интервала [0,1] является дистрибутивная решетка. Возникает следующий вопрос: какова решеточная структура множества $\mathcal{F}([0,1])$? Этому вопросу посвящена работа М. Мизумото и К. Танака [8].

При определении операций на элементах множества $\mathcal{F}([0,1])$ применяется *принцип обобщения*, введенный Л.Заде в [2], который носит эвристический характер и позволяет расширить область определения исходного отображения φ на класс нечетких множеств.

Пусть A, B $\in \mathcal{F}([0,1])$ и пусть $*$ есть бинарная операция, определенная в [0,1]. Тогда для $\forall x,y,z \in [0,1]$ операция $*$ может быть расширена на нечеткие множества A и B посредством принципа обобщения следующим образом:

$$\mu_{A*B}(z) = \bigvee_{z=x*y} (\mu_A(x) \wedge \mu_B(y)).$$

Отсюда расширенные операции max(A,B) и min(A,B) через их функции принадлежности запишем так:

$$\mu_{\max(A,B)}(z) = \bigvee_{z=\max(x,y)} (\mu_A(x) \wedge \mu_B(y)),$$

$$\mu_{\min(A,B)}(z) = \bigvee_{z=\min(x,y)} (\mu_A(x) \wedge \mu_B(y)),$$

$$\mu_{-A}(x) = \mu_{1-A}(x) = \mu_A(1-x).$$

Однако оказалось, что отличия от обычной теории нечетких множества, т.е. от теории нечетких множеств типа 1, весьма существенны: имеет место квази-решетка с законами де Моргана, т.е. нет поглощения (IV), дистрибутивности (V) и, конечно, законов (B1) и (B2), а также не выполняется (VII), но выполняется (VI).

Поэтому, обычно, в качестве истинностных значений для нечеткозначной логики используются не просто элементы множества $\mathcal{F}([0,1])$, а так называемые нечеткие числа (см. [7]), т.е. элементы из $\mathcal{F}([0,1])$, но с дополнительными условиями:

нормальность: $\exists x \in [0,1]$, $\mu_A(x) = 1$,

выпуклость: $\forall x,y,z \in [0,1]^3$, $x \leq y \leq z \Rightarrow \mu_A(y) \geq \min(\mu_A(x), \mu_A(z))$.

Тогда, определенные выше расширенные операции, но уже над множеством нормальных выпуклых чисел, образуют дистрибутивную решетку [8].

Обратим внимание, что открытие М. Мизумото и К. Танака того факта, что расширенные операции max и min на элементах множества $\mathcal{F}([0,1])$ образуют квази-решетку, представляет собой особый интерес.

Заметим, что начиная с работы [10], квази-решетки (дистрибутивные) получили специальное развитие. К тому же оказалось, что существуют логики (например, хорошо известная трехзначная логика бессмысленности Бочвара **B₃** [1]), в основе которых лежит не решеточная структура, а квази-решетка. Этот факт относительно **B₃** впервые был обнаружен В. К. Финном [5, с. 417].

B₃ выполняет все условия для нечеткой алгебры типа 2, но кроме этого выполняются законы дистрибутивности. Поэтому представляет интерес матрица VII, которая появилась в результате классификации трехзначных логик значения (см. [6, с.45]):

x	$\sim x$
0	1
½	½
1	0

$\wedge$	0	½	1
0	0	0	0
½	0	½	0
1	0	0	1

$\vee$	0	½	1
0	0	1	1
½	1	½	1
1	1	1	1

Эти операции образуют де моргановскую квази-решетку без законов дистрибутивности, но здесь выполняется (VII) и не выполняется (VI).

С помощью компьютерной программы, разработанной В. И. Шалаком, было показано, что не существует трехэлементной матрицы, в точности выполняющей все условия из [8] для нечеткой алгебры типа 2. Однако найдено четыре пары подходящих 4-х элементные матрицы. Во всех этих четырех матрицах две 3-х значных подматрицы со значениями {0, 1/3, 1} и {0, 2/3, 1} есть в точности слабые операции Клини (внутренние операции Бочвара). Таким образом, все полученные 4-х значные матрицы являются обобщением этих операций. Из этих четырех матриц две матрицы *для обоих* промежуточных значений не выполняют условие (VII). Из двух последних матриц в одной из них операции $\wedge$ и $\vee$ на множестве истинностных значений {1/3, 2/3} есть min и max соответственно. Рассмотрим эту матрицу:

x	~x
0	1
1/3	2/3
2/3	1/3
1	0

$\wedge$	0	1/3	2/3	1
0	0	1/3	2/3	0
1/3	1/3	1/3	1/3	1/3
2/3	2/3	1/3	2/3	2/3
1	0	1/3	2/3	1

$\vee$	0	1/3	2/3	1
0	0	1/3	2/3	1
1/3	1/3	1/3	2/3	1/3
2/3	2/3	2/3	2/3	2/3
1	1	1/3	2/3	1

Суммируем свойства этой матрицы. Во-первых, две указанных 3-х значные подматрицы образуют дистрибутивную квази-решетку. Во-вторых, подматрицы с истинностными значениями {0, 1} и {1/3, 2/3} образуют булеву решетку. В результате это дает де моргановскую недистрибутивную квази-решетку. Таким образом, эта матрица является моделью для нечеткой алгебры типа 2, точно также как трехэлементная матрица Клини является моделью для нечеткой алгебры типа 1.

Однако, представляет интерес рассмотреть модель для *нормальной* нечеткой алгебры типа 2. Как следует из [8], алгеброй нечеткой теории множеств типа 2 с условием нормальности является также де моргановская недистрибутивная квази-решетка, но в которой выполняются условия (VI) и (VII).

Оказывается, не существует не только трехэлементной, но и четырехэлементной модели для нормальной нечеткой алгебры типа 2 (!). С помощью компьютерной программы было найдено 14 пар подходящих 5-значных матриц. Рассмотрим одну из них, которая отличается от 5-значных матриц Клини только тем, что 2/4 $\wedge$ 3/4 = **1/4** и 2/4 $\vee$ 1/4 = **3/4**. Это оказалось достаточно, чтобы разрушить дистрибутивность и закон поглощения:

x	~x
0	1
1/4	3/4
2/4	2/4
3/4	1/4
1	0

$\wedge$	0	1/4	2/4	3/4	1
0	0	0	0	0	0
1/4	0	1/4	1/4	1/4	1/4
2/4	0	1/4	2/4	**1/4**	2/4
3/4	0	1/4	**1/4**	3/4	3/4
1	0	1/4	2/4	3/4	1

$\vee$	0	1/4	2/4	3/4	1
0	1	1/4	2/4	3/4	1
1/4	1/4	1/4	**3/4**	3/4	1
2/4	2/4	**3/4**	2/4	3/4	1
3/4	3/4	3/4	3/4	3/4	1
1	1	1	1	1	1

Заметим, что здесь подматрицы {0, 2/4, 1} и {0, 1/4, 3/4, 1} являются в точности 3-х и 4-х значными матрицами Клини.

В итоге мы имеем иерархию минимальных логических матриц, в основе которой лежит следующее соответствие:

a) наивная теория множеств - алгебра Буля - матрицы классической *двузначной* логики;

b) теория нечетких множеств - алгебра Клини (де моргановская дистрибутивная решетка с законом Клини) - *трехзначные* матрицы Клини;

c) теория нечетких множеств типа 2 - де моргановская недистрибутивная квази-решетка с невыполнением условия (VII) - *четырехзначные* матрицы;

d) нормальная теория нечетких множеств типа 2 - де моргановская недистрибутивная квази-решетка с выполнением условия (VII) - *пятизначные* матрицы.

Литература

1. *Бочвар Д.А.* Об одном трехзначном исчислении и его применении к анализу парадоксов классического расширенного функционального исчисления // Математический сборник. 1938. Т. 4. № 2. С.287-308.
2. *Заде Л.* Понятие лингвистической переменной и его применение к принятию приближенных рассуждений. М., 1976.
3. *Клини С.* Введение в метаматематику. М., 1957.
4. *Кофман А.* Введение в теорию нечетких множеств. М., 1982.
5. *Финн В.К.* Аксиоматизация некоторых трехзначных исчислений высказываний и их алгебр // Философия в современном мире. Философия и логика. М., 1974. С.398-438.
6. *Финн В.К., Аншаков О.М., Григолия Р.Ш.,Забежайло М.И.* Многозначные логики как фрагменты формализованной семантики // Семиотика и информатика. М., 1980. С.27-60.
7. *Bellman R.E., Zadeh L.A.* Local and fuzzy logics // Modern uses of multiple-valued logics. Dordrecht, 1977. P.103-165.
8. *Mizumoto M., Tanaka K.* Some properties of fuzzy sets of type 2 // Information and Control. 1976. Vol. 31. N. 4. P.312-340.
9. *Mukaidano M.* A set of independent and complete axioms for a fuzzy algebra (Kleene algebra) // International symposium on multiple-valued logic, 11th. N.Y., 1981. P.27-34.
10. *Plonka J.* On distributive quasi-lattices // Fundamenta Mathemacae. 1967. Vol. 60. P.191-200.
11. *Rasiowa H.* An algebraic approach to non-classical logics. Amsterdam, 1974.
12. *Zadeh L.A.* Fuzzy sets // Information and Control. 1965. Vol.8. P.338-353.

В.Л.Васюков

Метафора в прагматических матрицах

В статье рассматривается алгебраическая теория метафоры в пропозициональных языках, основывающаяся на так называемых прагматических матрицах - алгебраической конструкции, введенной М.Токажем в [1]. *Вводится понятие предструктурной операции присоединения следствий, самоинтенсиональности логики и доказывается ряд теорем (в частности, теорема представления).*

Понятие кореференциальности алгебраически изучалось с помощью специальной семантической конструкции, называемой референциальной матрицей, введенной в работе Р. Вуйчицкого в 1979 г. [2]. Обобщение референциальных матриц, так называемые прагматические матрицы (введенные в [1] М.Токажем), позволяет изучать не только кореференциальность, но также и синонимию в пропозициональных языках с прагматической точки зрения. Согласно [1, с. 93] разница между этими понятиями заключается в следующем.

Если предложение A высказываемое в ситуации a описывает факт, то есть, если ситуация описанная A (в a) действительной имеет место в реальном мире, то говорят, что A истинно (в a). Следовательно, существуют по меньшей мере два способа определения значения предложения в прагматике: согласно первому, значение A может быть определено как функция из множества ситуаций в $\{0,1\}$, имеющая значение 1 точно для тех ситуаций, в которых A истинно: согласно второму, значение A может определяться как функция из множество ситуаций в ситуации, принимающая для аргумента a значение b точно в том случае, когда A, будучи высказанным в ситуации a, описывает ситуацию b. Ясно, что эти два понятия значения не эквивалентны. Будем говорить, что предложения A и B кореференциальны, если их значения совпадают в первом случае, и синонимичны, если их значения совпадают во втором случае. Формальное определение выглядит следующим образом.

Под пропозициональным языком мы будем понимать абсолютно свободную алгебру $\mathcal{S}=\langle S,F_1,\ldots,F_n\rangle$, свободно порожденную счетным множеством, скажем $\{v_1, v_2, \ldots\}$; F_i предполагается k_i-местной. Структурное присоединение следствий будет называться логикой.

Пусть $\mathbf{A}=\langle A, f_1, \ldots, f_n\rangle$, будет алгеброй, подобной $\mathcal{S}$, и пусть D будет каким-либо семейством подмножеств A; тогда пара $\mathcal{M}=\langle\mathbf{A}, \mathcal{D}\rangle$ будет называться обобщенной матрицей для $\mathcal{S}$. Матрицы $\langle\mathbf{A}, \mathcal{D}\rangle$ и $\langle\mathbf{B}, \mathcal{E}\rangle$ называются изоморфными, тогда и только тогда, когда существует изоморфизм i из $\mathbf{A}$ на $\mathbf{B}$, такой, что для любого $X \subseteq A$, $X \in \mathcal{D}$ тогда и только тогда, когда $i(X) \in \mathcal{E}$. Каждая матрица однозначно определяет логику в $\mathcal{S}$, обозначаемую $Cn_{\mathcal{M}}$; $Cn_{\mathcal{M}}$ определяется следующим образом: для каждого $B \in S$ для каждого $X \subseteq S$

$$B \in Cn_{\mathcal{M}}(X) \text{ тогда и только тогда, когда}$$
$$\forall h \in Hom(\mathcal{S}, A) \forall D \in \mathcal{D}[hX \subseteq D \rightarrow hB \in D].$$

Под референциальной алгеброй (для $\mathcal{S}$) понимается любая алгебра $\mathbf{R}=\langle R, f_1, \ldots, f_n\rangle$, подобная $\mathcal{S}$, такая, что для некоторого множества $U \neq \varnothing$, R является подмножеством множества всех функций из U в $\{0,1\}$. Для любого $a \in U$ мы полагаем $D_a =_{df} \{r \in R : r(a)=1\}$ и пусть $\mathrm{D} =_{df} \{D_a : a \in U\}$. Тогда пара $\mathcal{R}=\langle\mathbf{R}, \mathcal{D}\rangle$ является обобщенной матрицей, называемой референциальной матрицей для $\mathcal{S}$ (над U).

Пусть T будет подмножеством U, называемым множеством фактов. Под прагматической алгеброй для $\mathcal{S}$ (над U) мы понимаем алгебру формы $\mathbf{P}=\langle P, f_1, \ldots, f_n\rangle$, подобную $\mathcal{S}$, где P является непустым подмножеством множества всех функций из U в U; $P \subseteq U^U$. Под прагматической матрицей для $\mathcal{S}$ (над P, T) мы подразумеваем алгебру формы $\mathcal{P}=\langle\mathbf{P}, \mathcal{D}\rangle$, где $\mathcal{D} =_{df} \{D_a : a \in U\}$, $D_a =_{df} \{p \in P : p(a) \in T\}$.

Будем говорить, что формулы A и B кореференциальны в $\mathcal{P}$ относительно h, символически $A \sim^h_{\mathcal{P}} B$, тогда и только тогда, когда для каждого $a \in U, h(A)(a) \in T$ тогда и только тогда, когда $h(B) \in T$ (см. [1, p. 96]). Мы будем говорить, что язык $\mathcal{S}$ является экстенсиональным относительно к $\mathcal{P}$, символически $\mathcal{P} \in Ext(\mathcal{S})$, тогда и только тогда, когда для каждого $h \in Hom(\mathcal{S}, \mathbf{P})$, для каждого $i \leq n$

$$A_1 \sim^h_{\mathcal{P}} B_1 \wedge \ldots \wedge A_{k_i} \sim^h_{\mathcal{P}} B_{k_i} \text{ влечет}$$

$$F_i(A_1, \ldots, A_{k_i}) \sim^h_{\mathcal{P}} F_i(B_i, \ldots, B_{k_i}).$$

A и B являются синонимами в $\mathcal{D}$ относительно h, символически $A \approx^h_{\mathcal{D}} B$, если $h(A)=h(B)$; и $\mathcal{S}$ сильно экстенсионально относительно $\mathcal{D}$, символически $\mathcal{D} \in \mathbf{Ext}(\mathcal{S})$, если $\sim^h_{\mathcal{D}} \subseteq \approx^h_{\mathcal{D}}$ для всех $h \in Hom(\mathcal{S}, \mathcal{D})$. Классы $Ext(\mathcal{S})$ и $\mathbf{Ext}(\mathcal{S})$ не совпадают; следовательно, поскольку очевидным образом $\approx^h_{\mathcal{D}}$ всегда содержится в $\sim^h_{\mathcal{D}}$, $\mathbf{Ext}(\mathcal{S}) \subset Ext(\mathcal{S})$.

В духе нашего предыдущего рассмотрения, мы будем говорить, что формулы A и B подобны по смыслу в $\mathcal{D}$ относительно h, символически $A \cong^h_{\mathcal{D}} B$, тогда и только тогда, когда для некоторого (по меньшей мере одного) $a \in U$, $h(A)(a) \in T$ тогда и только тогда, когда $h(B) \in T$. Мы будем говорить, что язык $\mathcal{S}$ интенсионален относительно к $\mathcal{D}$, символически $\mathcal{D} \in Int(\mathcal{S})$, тогда и только тогда, когда для каждого $h \in Hom(\mathcal{S}, \boldsymbol{P})$, для каждого $i \leq n$

$$A_1 \cong^h_{\mathcal{D}} B_1 \wedge \ldots \wedge A_{k_i} \cong^h_{\mathcal{D}} B_{k_i} \text{ влечет}$$

$$F_i(A_1, \ldots, A_{k_i}) \cong^h_{\mathcal{D}} F_i(B_i, \ldots, B_{k_i}).$$

A и B метафоричны в $\mathcal{D}$ относительно h, символически $A \cong^h_{\mathcal{D}} B$, если $codomain(h(A)) \cap codomain(h(B)) \neq \varnothing$; и $\mathcal{S}$ сильно интенсиональна относительно $\mathcal{D}$, символически $\mathcal{D} \in \mathbf{Int}(\mathcal{S})$, если $\cong^h_{\mathcal{D}} \subseteq \cong^h_{\mathcal{D}}$ для всех $h \in Hom(\mathcal{S}, \mathcal{D})$. Ясно, что $\mathbf{Int}(\mathcal{S}) \subset Int(\mathcal{S})$.

Ясно, что если формулы A и B синонимичны, то они также и метафоричны, однако обратное неверно. В подобной ситуации возникает следующая проблема: до какой степени (если это имеет место) метафоры будут, вообще говоря, независимы и самоопределимы.

Напомним, что операция присоединения C следствий называется структурной [33, p. 9] тогда и только тогда, когда для каждой подстановки e и для каждого $X \subseteq S$

$$eC(X)\subseteq C(eX).$$

Определим теперь, что присоединение следствий C будет предструктурным (символически C^*) тогда и только тогда, когда для каждого $X\subseteq S$ существует (по меньшей мере одна) подстановка e, такая, что выполняется вышеприведенное условие. Очевидно, что структурное присоединение следствий является предструктурным, но не наоборот.

Для предструктурного присоединения следствий $C^*(X)=C^*(Y)$ означает, что как $C^*(X)$, так и $C^*(Y)$ замкнуты относительно некоторой (по меньшей мере одной) подстановки $e\in End(S)$ (т. е. относительно некоторого эндоморфизма S). Однако, это должно означать, что из $C^*(X)=C^*(Y)$ и $C^*(Y)=C^*(Z)$ мы не можем заключить, что $C^*(X)=C^*(Z)$, потому что $C^*(X)$ и $C^*(Z)$ (возможно) замкнуты относительно разных подстановок. Единственный способ обойти эти трудности заключается во введении отношения # ("то же самость") на множестве предструктурных присоединений следствий (вместо =), которое очевидным образом является рефлексивным, симметричным и интранзитивным отношением. Таким образом, мы определяем, что $C^*(A)$ является тем же самым, что и $C^*(B)$ (символически $C^*(A)\#C^*(B)$, если $C^*(A)=C^*(B)$ для некоторой подстановки $e\in End(S)$.

Логика C называется самоэкстенсиональной, если для всех формул $A,B,D\in S$ из $C(A)=C(B)$ следует $C(D[A/v_l])=C(D[B/v_l])$; попросту говоря C самоэкстенсиональна, если логически эквивалентные формулы взаимно подстановимы. Мы будем говорить, что логика C^* самоинтенсиональна, если для всех формул $A,B,D\in S$ из $C^*(A)\#C^*(B)$ следует $C^*(D[A/v_l])\#C^*(D[B/v_l])$ (т. е. C^* самоинтенсиональна, если логически эквивалентные формулы взаимноподставимы только в некотором специальном случае, когда они представляют ту же самую формулу). Однако мы должны ввести ограничения, природа которых очевидна: D не должна быть антитавтологией (т. е. отрицанием тавтологии) либо пропозициональной переменной, v_l не должна быть пустой переменной (т. е. она должна в явном виде фигурировать в D). Следующее предложение следует непосредственно из определений:

Предложение. *Все самоэкстенсиональные логики самоинтенсиональны.*

Следующий шаг заключается в модификации теоремы представления из [1, р. 95].

Теорема представления. *Для каждой логики C^* в существует прагматическая матрица $\mathcal{P}$, слабо адекватная C^*, т. е. такая, что $C^*\#Cn^*_{\mathcal{P}}$.*

Доказательство. Согласно [1] канонический изоморфизм определяется следующим образом. Мы полагаем $U=2^S$, $T=\{S-\{A\}: A\in S\}$ и для $A\in S$, $X\subseteq S$ мы определяем

$$p_A(X)=\begin{cases} S-\{A\} & \text{если } A\in C^*(X) \\ S \end{cases}$$

и для каждого $i=1,\ldots,n$

$$f_i(p_{A_1},\ldots,p_{A_{k_i}})=p_{F_i(A_1,\ldots,A_{k_i})}.$$

Мы полагаем $\mathcal{P}=<\boldsymbol{P},\mathcal{D}>$, где $\boldsymbol{P}=<P,f_1,\ldots,f_n>$, $P=\{p_A: A\in S\}$. Пусть $h_0:\mathcal{S}\to\boldsymbol{P}$ будет каноническим морфизмом, т. е. таким, что $h_0(v_i)=p_{v_i}$ для всех $i\in\omega$. Тогда (см. [1, р. 95]) для каждого $h\in Hom(\mathcal{S},\boldsymbol{P})$ существует подстановка e, такая, что $h=h_0\circ e$.

Чтобы доказать $Cn^*_{\mathcal{P}}\#C^*$, нам нужно рассмотреть включение справа налево, поскольку доказательство обратного остается таким же, как и в [1]. Предположим, что $A\in C^*(X)$ и что $hX\subseteq D_Y$ для некоторого $Y\subseteq S$, т. е. $h(B)(Y)\in T$ для всех $B\in X$. Согласно вышеизложенному, существует такая $e:\mathcal{S}\to\mathcal{S}$, что $h_0(eB)(Y)=p_{eB}(Y)\in T$, для всех $B\in X$, т. е. $eB\in C^*(Y)$ для всех $B\in X$, таким образом $eX\subseteq C^*(Y)$. Ввиду того, что каждое C^* является предструктурным, $eA\in C^*(eX)$ для некоторого e (т. е. замкнуто по e); таким образом $eA\in C^*(Y)$. Наше рассмотрение теперь становится “относящимся” только к тем C^*, которые замкнуты по e. Следовательно, $h(A)(Y)=h_0(eA)(Y)=S-\{eA\}\in T$. Отсюда $h(A)\in D_Y$, и $A\in Cn^*_{\mathcal{P}}(X)$. ч.т.д.

Немедленным следствием доказательства теоремы представления является то, что предыдущее определение $Cn_{\mathcal{M}}$ в случае предструктурного присоединения следствий $Cn^*_{\mathcal{M}}$ нуждается в следующем ослаблении: для каждого $B \in S$ для каждого $X \subseteq S$

$$B \in Cn^*_{\mathcal{M}}(X) \text{ тогда и только тогда, когда}$$
$$\exists h \in Hom(\mathcal{S}, A) \forall D \in \mathcal{D}[hX \subseteq D \rightarrow hB \in D].$$

Теорема самоинтенсиональности. *Если $\mathcal{P} \in Int(\mathcal{S})$, то $Cn^*_{\mathcal{P}}$ является самоинтенсиональной.*

Доказательство. Из определения интенсиональности $\mathcal{S}$ следует, что если $A \cong^h_{\mathcal{P}} B$, то для некоторой $D \in S$, $D[A / v_1] \cong^h_{\mathcal{P}} D[B / v_1]$ (используя индукционный аргумент). Следовательно, поскольку $Cn^*_{\mathcal{P}}(A) \# Cn^*_{\mathcal{P}}(B)$ влечет $A \cong^h_{\mathcal{P}} B$ для некоторого h. то для некоторой $D \in S$, $Cn^*_{\mathcal{P}}(D[A / v_1] \# Cn^*_{\mathcal{P}}(D[B / v_1]$, что и завершает доказательство.

Когда $\mathbf{A} = \langle A, f_1, \dots, f_n \rangle$, есть алгебра, подобная $\mathcal{S}$ и $\mathcal{M} = \langle \mathbf{A}, \mathcal{D} \rangle$ является обобщенной матрицей, мы полагаем $\overline{\mathcal{M}} = \langle A, \mathcal{D} \cup \{A\} \rangle$. Очевидно, что для всех $\mathcal{M}$, $Cn^*_{\mathcal{M}} = Cn^*_{\overline{\mathcal{M}}}$.

Теорема метафоричности. *Для каждой референциальной матрицы $\mathcal{R}$ существует прагматическая матрица $\mathcal{P} \in Int(\mathcal{S})$, такая, что $\mathcal{R}$ изоморфна $\overline{\mathcal{P}}$.*

Доказательство. Как в [1, p. 96] пусть $\mathcal{R} = \langle \mathbf{R}, \mathcal{C} \rangle$, $\mathbf{R} = \langle R, g_1, \dots, g_n \rangle$, $R \subseteq \{0,1\}^W$ и пусть $w_0 \in W, w_1 \notin W$. Положим $U = W \cup \{w_1\}, T = \{w_1\}$, и для каждого $r \in R, a \in U$ мы определяем

$$p_r(a) = \begin{cases} w_1 & \text{если } a = w_1 \text{ либо } r(a) = 1 \\ w_0 & \end{cases}$$

Для $i = 1, \dots, n$ мы получаем $f_i(p_{r_1}, \dots, p_{r_{k_i}}) = p_{g_i(r_1, \dots, r_{k_i})}$. Пусть теперь множеством $\mathcal{P}$ будет $\langle \mathbf{P}, \mathcal{D} \rangle$, где $\mathbf{P} = \langle P, f_1, \dots, f_n \rangle$, $P = \{p_r : r \in R\}$, $\mathcal{D} = \{E_a : a \in U\}$, $E_a = \{p \in P. p(a) = w_1\}$. Мы определяем $I{:}R\to P$ как $I(r)=p_r$. Согласно [1, р. 96] I является матричным изоморфизмом $\mathcal{R}$ на $\mathcal{P}$.

Нашей целью является показать, что $\mathcal{P}\in Int(\mathcal{S})$. Предположим, что $A\cong^{h}_{\mathcal{P}} B$, т. е. для некоторого) $a\in U$, $h(A)(a)=w_1$ тогда и только тогда, когда $h(B)(a)=w_1$. Функции из P двузначны, следовательно $codomain(h(A))\cap codomain(h(B))\neq\varnothing$, то есть $A\cong^{h}_{\mathcal{P}} B$. Таким образом мы доказали, что $\cong^{h}_{\mathcal{P}}\subseteq\cong^{h}_{\mathcal{P}}$. Отсюда $\mathcal{P}\in Int(\mathcal{S})$.

Следствие. *Для каждой логики C^* следующие условия эквивалентны:*

(i) $C^* = Cn^*_{\mathcal{R}}$ *для некоторой референциальной матрицы* $\mathcal{R}$,

(ii) $C^* = Cn^*_{\mathcal{P}}$ *для некоторой прагматической матрицы* $\mathcal{P}\in \mathbf{Int}(\mathcal{S})$,

(iii) $C^* = Cn^*_{\mathcal{P}}$ *для некоторой прагматической матрицы* $\mathcal{P}\in Int(\mathcal{S})$,

(iv) C^* *самоинтенсиональна.*

Заметим, что то, до какой степени алгебраическая теория метафоры является жизнеспособной, полностью зависит от логического обоснования - чтобы обосновать наше исследование, нам нужно указать (или построить) логические системы, использующие понятие метафоры (если таковые вообще существуют). Но этот вопрос не входит в нашу задачу, по крайней мере в данной статье.

Литература

1. *Tokarz M.* Synonimy in Sentential Language: a Pragmatic View, Studia Logica, 47, №2, 1988, pp. 93-97.
2. *Wyjcicki R.* Referential Matrix Semantics for Propositional Calculi, Bulletin of the Section of Logic, 8, №4, 1979, pp. 170-179.

А.С.Карпенко*, В.М.Попов

Новая аксиоматизация импликативного фрагмента бесконечнозначной логики Лукасевича $Ł_\omega$

Бесконечнозначной матрицей Лукасевича $\mathfrak{M}^L_\omega$ [Łukasiewicz, Tarski 1930] называется матрица вида

$$\mathfrak{M}^L_\omega = \langle V, \sim, \to, \{1\}\rangle,$$

где V есть множество рациональных чисел из отрезка [0, 1] или сам отрезок [0, 1]; {1} – множество выделенных значений; ~ есть унарная и → бинарная операции отрицания и импликации соответственно, определенные на множестве V следующим образом:

$$\sim x = 1\text{-}x,$$
$$x \to y = \min(1,\ 1\text{-}x+y).$$

Я.Лукасевич в указанной выше работе выдвинул гипотезу, что бесконечнозначная матричная логика $Ł_\omega$, задаваемая матрицей $\mathfrak{M}^L_\omega$, аксиоматизируется с правилом подстановки и modus ponens посредством следующих аксиом:

B'. $(p \to q) \to ((q \to r) \to (p \to r))$
K. $p \to (q \to p)$.
D. $((p \to q) \to q) \to ((q \to p) \to p)$
L. $((p \to q) \to (q \to p)) \to (q \to p)$.
Contr. $(\sim p \to \sim q) \to (q \to p)$

Эта гипотеза была подтверждена М.Вайсбергом [Wajsberg 1935, p.240], но доказательство не сохранилось. Позже оказалось, что аксиома **L** не является независимой. Несколько различные доказательства этого факта были получены одновременно и независимо друг от друга К.А.Мередитом [Meredith 1958] и Ч.Ч.Чэном [Chang 1958a]. Наконец, А.Роуз и Дж.Россер [Rose, Rosser 1958] опубликовали семантическое, а

* Работа выполнена при поддержке РГНФ, грант 95-06-17270.

Ч.Ч.Чэн [Chang 1958b, 1959] алгебраическое доказательство полноты $Ł_\omega$ относительно M_ω^L.

А. Роуз [Rose 1956a], а затем независимым образом Р. Мейер [Meyer 1966], показали, что импликативный фрагмент $Ł_{\omega\to}$ логики $Ł_\omega$ аксиоматизируют формулы **B'**, **K**, **D**, **L**[1].

В работе [Meyer, Parks 1972] при аксиоматизации импликативного фрагмента логики **RM** (см. [Anderson, Belnap 1975]) появляется формула

$$((((p\to q)\to q)\to p)\to r)\to(((((q\to p)\to p)\to q)\to r)\to r),$$

которую обозначим посредством **X**.

Мы покажем, что $Ł_{\omega\to}$ аксиоматизируется посредством **B**, **C**, **K**, **X**, где

B. $(q \to r) \to ((p \to q) \to (p \to r))$.

C. $(p \to (q \to r)) \to (q \to (p \to r))$.

Теорема. **BCKX = B'KDL**.

Доказуемость формулы A будем обозначать посредством $\vdash$A. Сами доказательства будем записывать способом, предложенным Я. Лукасевичем, однако, в наших обозначениях. Каждый доказанный тезис будет иметь свой номер и предшествующую строку доказательства, которая состоит из двух частей, разделенных звездочкой *. Слева стоит формула (или ее номер), в которую произведена подстановка и которая является большей посылкой. Справа указывается меньшая посылка, которая также может быть получена за счет подстановки. Результат применения modus ponens указывается посредством тире, после чего вся строка заканчивается запятой, а доказанная формула - точкой.

Утверждение 1. **B**, **C**, **K**, **X** $\vdash$ **B'**, **D**, **L**.

1. $(q\to r) \to ((p \to q) \to (p \to r))$ (=**B**).
2. $(p \to (q \to r)) \to (q \to (p \to r))$ (=**C**).
3. $p \to (q \to p)$ (=**K**).
4. $((((p\to q)\to q)\to p)\to r)\to(((((q\to p)\to p)\to q)\to r)\to r)$ (=**X**).

---

[1] См. также [Woźniakowska 1978], где $Ł_{\omega\to}$ аксиоматизируется посредством **K**, **D** и $((p \to q) \to (p \to r)) \to ((q \to p) \to (q \to r))$.

2 r/p * 3 - 5,

5. $q \to (p \to p)$.

5 $q/p\to(q\to p)$ * 3 - 6.

6. $p \to p$.

3 $p/p\to p$, $q/q\to p$ * 6 - 7,

7. $(q\to p)\to(p\to p)$.

2 $p/q\to p$, q/p, r/p * 7 - 8,

8. $p\to((q\to p)\to p)$.

1 q/p, $r/(q\to p)\to p$, $p/(p\to q)\to q$ * 8 - 9,

9. $(((p\to q)\to q)\to p)\to \mathbf{D}$.

2 $p/q\to r$, $q/p\to q$, $r/p\to r$ * 1 - 10,

10. $(p\to q)\to((q\to r)\to(p\to r))$ (=**B'**).

10 $q/(q\to p)\to p$, r/q * 8 - 11,

11. $(((q\to p)\to p)\to q)\to(p\to q)$.

2 $p/q\to p$, r/p * 6 $p/q\to p$ - 12,

12. $q\to((q\to p)\to p)$.

1 $r/(q\to p)\to p$, $p/(p\to q)\to q)$ * 12 - 13,

13. $(((p\to q)\to q)\to q)\to(((p\to q)\to q)\to((q\to p)\to p))$.

1 $q/((p\to q)\to q)\to q$, $r/\mathbf{D}$, $p/p\to q$ * 13 -14,

14. $((p\to q)\to(((p\to q)\to q)\to q))\to((p\to q)\to \mathbf{D})$.

14 * 12 $q/p\to q$, p/q - 15,

15. $(p\to q)\to \mathbf{D}$.

1 $q/p\to q$, $r/\mathbf{D}$, $p/((q\to p)\to p)\to q$ * 15 - 11 - 16,

16. $(((q\to p)\to p)\to q) \to \mathbf{D}$.

4 $r/\mathbf{D}$ * 9 - 16 - 17,

17. $((p\to q)\to q)\to((q\to p)\to p)$ (=**D**)[2].

3 $p/(((p\to q)\to q)\to p)\to(q\to p)$, $q/(p\to q)\to(q\to p)$ *
11 q/p, p/q - 18,

18. $((p\to q)\to(q\to p))\to((((p\to q)\to q)\to p)\to(q\to p)$.

2 $p/(p\to q)\to(q\to p)$, $q/((p\to q)\to q)\to p$, $r/q\to p$ *
18 - 19,

19. $(((p\to q)\to q)\to p)\to \mathbf{L}$.

---

[2] Другое доказательство **B, C, K, X** $\vdash$ **D** имеется в [Slaney, Bunder 1994].

1 $q/((q \to p) \to (p \to q)) \to (p \to q)$, $r/\mathbf{L}$, $p/((q \to p) \to p) \to q$ * 17 $p/q \to p$, $q/p \to q$ - 19 p/q, q/p - 20,

20. $(((q \to p) \to p) \to q) \to \mathbf{L}$.

4 $r/\mathbf{L}$ * 19 - 20 - 21,

21. $((p \to q) \to (q \to p)) \to (q \to p)$ (=$\mathbf{L}$).

Утверждение 2. **B', K, D, L** $\vdash$ **C, B, X**.

1. $(p \to q) \to ((q \to r) \to (p \to r))$ (=**B'**).
2. $p \to (q \to p)$ (=**K**).
3. $((p \to q) \to q) \to ((q \to p) \to p)$ (=**D**).
4. $((p \to q) \to (q \to p)) \to (q \to p)$ (=**L**).

   1 $q/(q \to p) \to p$, $r/(p \to q) \to q$ * 2 $q/q \to p$ - 3 p/q, q/p - 5,
5. $p \to ((p \to q) \to q)$.

   1 p/q, $q/(q \to r) \to r$, $r/p \to r$ * 5 p/q, q/r - 6,
6. $(((q \to r) \to r) \to (p \to r)) \to (q \to (p \to r))$.

   1 $p/p \to (q \to r)$, $q/((q \to r) \to r) \to (p \to r)$, $r/q \to (p \to r)$ * 1 $q/q \to r$ - 6 - 7,
7. $(p \to (q \to r)) \to (q \to (p \to r))$ (=**C**).

   7 $p/p \to q$, $q/q \to r$, $r/p \to r$ * 1 - 8,
8. $(q \to r) \to ((p \to q) \to (p \to r))$ (=**B**).

   8 $q/((q \to p) \to (p \to q))$, $r/p \to q$, $p/r \to (p \to q)$ * 4 p/q, q/p - 9,
9. $((r \to (p \to q)) \to ((q \to p) \to (p \to q))) \to$ $((r \to (p \to q)) \to (p \to q))$.

   1 $p/q \to (p \to r)$, $q/(r \to (p \to q)) \to ((q \to p) \to (p \to q))$, $r/(r \to (p \to q)) \to (p \to q)$ * 1 $p/q \to p$, q/r, $r/p \to q$ - 9 - 10,
10. $((q \to p) \to r) \to ((r \to (p \to q)) \to (p \to q))$.

    1 $p/(q \to p) \to r$, $q/(r \to (p \to q)) \to (p \to q)$, $r/((p \to q) \to r) \to r$ * 10 - 3 p/r, $q/p \to q$ - 11,
11. $((q \to p) \to r) \to (((p \to q) \to r) \to r)$.

    7 $p/(p \to q) \to q$, $q/q \to p$, r/p * 3 - 12,
12. $(q \to p) \to (((p \to q) \to q) \to p)$.

    1 $p/q \to p$, $q/((p \to q) \to q) \to p$ * 12 - 13,
13. $((((p \to q) \to q) \to p) \to r) \to ((q \to p) \to r)$.

    1 $p/(((p \to q) \to q) \to p) \to r$, $q/(q \to p) \to r$, $r/((p \to q) \to r) \to r$ * 13 - 11 - 14,

14. $(((p\to q)\to q)\to p)\to r)\to(((p\to q)\to r)\to r)$.

7 p/$((p\to q)\to q)\to p)\to r$, q/$((p\to q)\to r$ * 14 - 15,

15. $((p\to q)\to r)\to((((p\to q)\to q)\to p)\to r)\to r)$.

1 p/$((p\to q)\to q)\to p)\to r$, q/$(q\to p)\to r$,

r/$((((q\to p)\to p)\to q)\to r)\to r$ * 13 - 15 p/q, q/p - 16,

16. $(((p\to q)\to q)\to p)\to r)\to(((((q\to p)\to p)\to q)\to r)\to r)$ (=**X**).

Таким образом, теорема доказана.

Литература

Anderson A. R., Belnap N. D., jr. [1975]. Entailment: The logic of relevance and necessity. Princeton.

Chang C. C. [1958a] Proof of an axiom of Łukasiewicz // Transactions of the American Mathematical Society. Vol. 87. P. 55-56.

Chang C.C. [1958b]. Algebraic analisis of many-valued logics // Ibid. Vol. 88. P. 467-490.

Chang C.C. [1959]. A new proof of the completeness c the Łukasiewicz axioms // Ibid. Vol. 93. P.74-80.

Łukasiewicz J., Tarski A. [1930]. Untersuchungen uber d n Aussagenkalkul // Comptes rendus de la Societe des Sciences et des Lettres de Varsovie. Vol. 23. Cl. iii. P.1-21. (Английский перевод: Investigations into the sentential calculus // Łukasiewicz J.. Selected works. Warszawa, 1970. P.131-152).

Meredith C. A. [1958]. The dependence of an axiom of Łukasiewicz // Transactions of the American Mathematical Society. Vol. 87. P. 54.

Meyer R.K. [1966] Pure denumerable Łukasiewicz implication // The Journal of Symbolic Logic. Vol. 31. P.575-580.

Meyer R.K., Parks Z. [1972]. Independent axioms for the implicational fragment of Sobocinski's three-valued logic // Zeitschrift für mathematische Logik und Grundlagen der Mathematik. Bd.18. S.291-295.

Rose A. [1956a]. Formalization du calcul propositional implicati{ á $\aleph_0$-valeurs de Łukasiewicz // Comptes rendud hebdomadaires des seance de l'Academie des Sciences Vol.243. P.1183-1185.

Slaney J. K., Bunder M. W. [1994]. Classical versions of **BCI**, **BCK** and **BCIW** logics // Bulletin of the Section of Logic. 1994. Vol. 23. N 2. P. 61-65.

Wajsberrg M. [1935]. Beiträge zum Metaaussgenkalkül I // Monatshefte für Mathematik und Physik. Vol. 42. P. 221-242. (Английский перевод: Contributions to meta-calculus of propositions I // Wajsberg M. [1977]. P. 89-106]).

Wozniakowska B. [1978]. Algebraic proof of the separation theorem for the infinite-valued logic of Łukasiewicz // Reports on Mathematical Logic. Vol. 10. P.129-137.

С.А.Павлов

Трехзначная логика Лукасевича и логика ложности FL4

Обсуждается логика ложности FL4, которая рассматривается как четырехзначное обобщение трехзначной логики Лукасевича, отличающееся от обобщения Лукасевича.

Логика ложности FL4 позволяет корректно оперировать, в дополнение к двузначным высказываниям, с высказываниями, содержащими противоречивую и неполную информацию.

Для FL4 имеется ряд содержательных и формальных соответствий с 4-значными логикой Белнапа и логиками истины фон Вригта, для трехзначной сублогики логики ложности с логикой Клини.

Введение

Построение и исследование логики ложности FL4 [8.9] дает ответ на вопрос о том как следует рассуждать, используя понятия истинности и ложности.

Понятия истинности и ложности употребляются в естественном языке как предикаты и как операторы в предложениях вида: "Предложение A истинно (ложно).",

"Истинно (ложно), что P.".

в которые вместо A подставляются имена предложений, а вместо P предложения.

Неограниченное использование этих понятий в естественном языке ведет к парадоксам.

Для того, чтобы избежать трудностей, связанных с семантическими парадоксами типа парадокса лжеца и трудностей, связанных с определением высказывания и определением истины, примем следующее ограничение.

1. Понятия истинности и ложности будем рассматривать и употребляють только в высказываниях вида:

"Предложение 'S' истинно.", "Предложение 'S' ложно."

(символически (|S), (–S)), в которых имена предложений образованы с помощью кавычковой функции.

Высказывания (|S), (–S) являются высказываниями об истинности и ложности предложения S и являются высказываниями в метаязыке относительно языка, в котором сформулировано предложение S. Т.е. содержательно понятия истинности и ложности являются в этих высказываниях метапредикатами для S.

Множество высказываний языка, метаязыка, метаметаязыка рассматривается как одно целое без разделения на уровни, то есть с высказываниями S, (|S), (–S), (|S(|S)), (–(–S)) будем оперировать совместно в языке FL4.

Приведем еще ряд содержательных тезисов, являющихся исходными для логик истинности и ложности.

2. Понятия истинности и ложности будут в формальной системе играть роль логических операторов. Операторы истинности и ложности рассматриваются в качестве исходных операторов.

3. Высказывания (|S), (–S) об истинности (ложности) предложения S двузначны, в то время как не всякое предложение S должно быть либо истинным, либо ложным.

Последнее означает, что в множество предложений, подлежащих оценке на истинность или ложность, включаются предложения, которые могут оцениваться как истинные и ложные одновременно, а также предложения, которые являются ни истинными, ни ложными.

4. Истинность и ложность предложений с импликацией будем задавать традиционно.

Предложение "если S_1, то S_2" будем записывать символически $(S_1 \to S_2)$. Будем полагать, что

предложение '$(S_1 \to S_2)$' истинно, если и только если
'S_1' ложно или 'S_2' истинно,
и предложение '$(S_1 \to S_2)$' ложно, если и только если
'S_1' истинно и 'S_2' ложно.

1. Язык логики истинности и ложности ML4 и язык логики ложности FL4

Сформулируем сначала язык логики истинности и ложности ML4 [7] с тремя исходными логическими константами: операторами истинности и ложности и импликацией, а затем покажем, что возможна более лаконичная формулировка эквивалентного языку ML4 языка логики ложности FL4 [8] с двумя константами: оператором ложности и импликацией.

Алфавит ML4: $s, s_1, s_2, \dots$ сентенциальные переменные;

$|, -, \rightarrow$ логические константы;

(,) технические символы.

Правила образования п.п.ф.

i Всякая сентенциальная переменная есть п.п.ф.

ii Если A , B есть п.п.ф., то $(|A), (-A), (A \rightarrow B)$, есть п.п.ф.

Метапеременные: A, B, C, ... для п.п.ф.

Принимаем стандартные соглашения относительно опускания скобок. Введем следующие

сокращения.

Для высказывания о строгой истинности предложения A: '$\ulcorner$' содержательно означает 'есть истинно и неложно'.

D1.1 $\ulcorner A =_{df} -(|A \rightarrow -A)$ (D1.2.4)[1]

Определим импликацию $\supset$, которую назовем D - импликацией, так как именно она фигурирует в теореме дедукции.

D1.2 $(A \supset B) =_{df} (\ulcorner A \rightarrow \ulcorner B)$ (D1.2.5)

Выделим подкласс формул, для которых будут иметь место аксиомы и теоремы классической логики Cl, посредством определения в классе п.п.ф. подкласса T.F.-формул (T.F.-ф.)

iii Если A , B есть п.п.ф., то $(|A), (-B)$ есть T.F.-ф.

iv Если P_1, P_2 есть T.F.-ф., то $(P_1 \rightarrow P_2)$, есть T.F.-ф.

Пусть $P, P_1, P_2, \dots$ есть метапеременные для T.F.-ф.

D1.3.1 $(P_1 \wedge P_2) =_{df} -(P_1 \supset -P_2)$

D1.3.2 $(P_1 \vee P_2) =_{df} (-P_1 \supset P_2)$

D1.3.3 $(P_1 \equiv P_2) =_{df} (P_1 \supset P_2) \wedge (P_2 \supset P_1)$

Схемы аксиом

A1.1 $(P_1 \supset (P_2 \supset P_1))$

A1.2 $(P_1 \supset (P_2 \supset P_3)) \supset ((P_1 \supset P_2) \supset (P_1 \supset P_3))$

A1.3 $((-P_1 \supset -P_2) \supset (P_2 \supset P_1))$

К схемам аксиом Cl добавим следующие.

A1.4 $|P \equiv P$ (редукция оператора истинности)

---

[1] В скобках справа приведена нумерация определений из [8].

В.А.Смирнов в 1979г. отметил в связи с [6], что исчисление с аксиомами A1.1-A1.4 является консервативным расширением классической логики с аксиомами A1.1-A1.3.

A2.1 $|(A \to B) \equiv -A \vee |B$ (редукция истинности импликации)

A2.2 $-(A \to B) \equiv |A \wedge -B$ (редукция ложности импликации)

Правило вывода $$\frac{A, (A \supset B)}{B}$$

Определим формулу 0, являющуюся тождественно ложной, которая будет играть роль константы "ложь".

D1.4.1 $0 =_{df} -(-s \to -s)$ (константа "ложь") (D1.2.1)

Определим отрицание, соответствующее исходной импликации $\to$.

D1.4.2 $\sim A =_{df} (A \to 0)$ (отрицание) (D1.2.2)

В следующих теоремах и метатеоремах показывается различие между оператором ложности и отрицанием.

T1.1.1 $\sim A \supset -A$

T1.1.2 Не имеет места, что $-A \supset \sim A$

T1.2.1 $|\sim\sim A \equiv |A$

T1.2.2 Не имеет места, что $|--A \equiv |A$

Используя отрицание, установим соотношения между операторами истинности и ложности.

T1.3.1 $|A \equiv -\sim A$

Это тождество показывает, что можно элиминировать оператор ложности из языка ML4, и затем определить его через оператор истинности и отрицание. При этом отрицание необходимо добавить в алфавит исчисления в качестве исходного символа, как это имеет место в логиках истины фон Вригта [3].

T1.3.2 $-A \equiv |\sim A$

Последнее тождество показывает, что можно элиминировать оператор истинности из языка ML4, и затем определить его через оператор ложности и отрицание.

Язык FL4 получаем из языка ML4 в результате удаления символа оператора истины из алфавита исчисления и добавления определения оператора истинности к предыдущим, соответственно их перенумеровав (см. сноску 1).

$|A =_{df} - \sim A$ (D1.2.3)

Высказывание об истинности предложения S рассматривается как сокращение для высказывания о ложности отрицания предложения S.

Одноуровневая, односортная формулировка языка FL4

В вышеприведенных формулировках языков ML4 и FL4 существенно используются два сорта переменных: для п.п.ф. и TF-ф. Аналогично этому использование двух сортов переменных характерно для двухуровневых логик типа логики Д.А.Бочвара [2], логик истины фон Вригта [3], комбинированной логики высказываний и событий В.А.Смирнова [10].

Покажем, что язык FL4 (ML4) может быть сформулирован с использованием только одного сорта переменных, то есть логика ложности может рассматриваться как одноуровневая.

Имеем следующие теоремы.

T1.4.1 $(A \supset B) \supset ((B \supset C) \supset (A \supset C))$ (B')[2]

T1.4.2 $(A \supset (B \supset A)$ (K)

T1.4.3 $(((A \supset B) \supset B) \supset B)$ (P)

Из теоремы Тарского-Бернайса следует, что D-импликация $\supset$ является классической.

T1.4.4 $(0 \supset A)$ (N)

Таким образом D-импликация соответствует импликации классической 1-логики в классификации А.С.Карпенко [4, 9].

Определим D-отрицание, D-конъюнкцию, D-дизъюнкцию и D-эквивалентность, соответствующие D-импликации.

D1.4.3 $\neg A =_{df} (A \supset 0)$

Обобщим определения D1.3.1 - 3 на класс всех п.п.ф.

D1.5.1 $(A \wedge B) =_{df} \neg(A \supset \neg B)$

D1.5.2 $(A \vee B) =_{df} (\neg A \supset B)$

D1.5.3 $(A \equiv B) =_{df} (A \supset B) \wedge (B \supset A)$

---

[2] B', K, P, N - обозначения формул в классификации А.С.Карпенко [4].

Схемы аксиом (для односортной формулировки FL4, ML4)

A*1.1 $(A_1 \supset (A_2 \supset A_1))$

A*1.2 $(A_1 \supset (A_2 \supset A_3)) \supset ((A_1 \supset A_2) \supset (A_1 \supset A_3))$

A*1.3 $((\neg A_1 \supset \neg A_2) \supset (A_2 \supset A_1))$

Вместо аксиомы A1.4 необходимо добавить аксиомы редукции операторов истинности и ложности, соответствующие следующим теоремам FL4.

T1.5.1 $|-A \equiv -A$ (редукция оператора истинности)

T1.5.2 $--A \equiv \neg -A$ (редукция оператора ложности)

Аксиомы A2.1, A2.2 и правило вывода остаются без изменений.

Таким образом формулируется логика FL4 (ML4) с использованием только одних метапеременных для п.п.ф.

2. Тетралемма истинности и ложности и интерпретация языка логики FL4

Определим n-местную исключающую дизъюнкцию:

D2.1 $\vee^n (A_1, A_2, \ldots, A_n) =_{df} (A_1 \wedge \neg A_2 \wedge \ldots \neg A_n) \vee$

$\vee (\neg A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \neg A_n) \vee \ldots \vee (\neg A_1 \wedge \neg A_2 \wedge \ldots A_n)$

Следующую теорему назовем тетралеммой истинности и ложности.

T2.1 $\vee^4 (|A \wedge --A,\ -|A \wedge -A,\ |A \wedge -A,\ -|A \wedge --A)$.

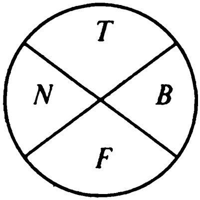
В соответствии с тетралеммой разобъем универсум всех п.п.ф. *U* на четыре непересекающихся области (*T*, *F*, *B*, *N*-области).

T-область (область строгой истинности) - множество истинных и неложных предложений.

F-область (область строгой ложности) - множество неистинных и ложных предложений.

B-область - множество истинных и ложных предложений.

N-область - множество неистинных и неложных предложений.



Сопоставим этим областям 4 истинностных значения T (3)[3], F (0), B (2), N (1), содержательный смысл которых следующий: истинно и неложно; ложно и неистинно; ложно и истинно; ни истинно, ни ложно (аналогично у Мускенса [11]). Отметим, что ранее в работах [6, 7] два последних значения назывались противоречивость C (2) и индифферентность I (1). В связи с тем, что оказалось возможным рассматривать в языке FL4 несколько видов противоречий, автор предпочел более нейтральные обозначения Белнапа [1].

Выделенное значение - T (3).

Таблицы истинности для исходных и определенных выше связок:

A	−A	~A	¬A
0	3	3	3
1	0	1	3
2	3	2	3
3	0	0	0

→	0	1	2	3
0	3	3	3	3
1	1	1	3	3
2	2	3	2	3
3	0	1	2	3

A	|A	⌈A
0	0	0
1	0	0
2	3	0
3	3	3

⊃	0	1	2	3
0	3	3	3	3
1	3	3	3	3
2	3	3	3	3
3	0	0	0	3

---

3 В скобках приводятся цифровые обозначения истинностных значений.

Характеристической для FL4 является матрица m^{FL4}.

$m^{FL4} = <\{T,F.B.N\}. -, \to, \{T\}> = <\{0,1,2,3\}, -, \to, \{3\}>$

Алгеброй этой матрицы является FA4-алгебра или алгебра ложности.

$FA4 = <\{T.F,B,N\}, -. \to>$

Для универсума всех п.п.ф. *U* имеется 14 непустых собственных подмножеств (областей), которые можно рассматривать как объединения *T*, *F*, *B*, *N*-областей: ***TFB***, ***TFN***, ***TBN***, ***FBN***, ***TB***, ***FN***, ***FB***, ***TN***, ***TF***, ***BN***, ***T***, ***F***, ***B***, *N*-области.

Также унарные операторы можно рассматривать в соответствии с тем, в какой области они выполняются. Так оператору строгой истинности $\ulcorner$ отвечает *T*-область, в соответствии со следующей теоремой, которая поясняет смысл определения D1.1.

T2.1 $\quad \ulcorner A \equiv (|A \wedge --A)$.

Оператору истинности | отвечает *TB*-область, которую будем сокращенно обозначать *t*-областью.

Различия операторов истинности и строгой истинности выражаются в следующих теоремах.

T2.2.1 $\quad \ulcorner A \supset |A$

T2.2.2 Не имеет места, что $|A \supset \ulcorner A$

Определим оператор строгой ложности $\urcorner$, которому отвечает *F*-область

D1.2 $\quad \urcorner A =_{df} (-|A \wedge -A)$ (D3.1)

Различия операторов ложности и строгой ложности выражаются в следующих теоремах.

T2.3.1 $\quad \urcorner A \supset -A$

T2.3.2 Не имеет места, что $-A \supset \urcorner A$

Также назовем *FB*-область, отвечающую оператору ложности –, *f*-областью. *TF*-область строгой истинности или строгой ложности, то есть область классической двузначности, обозначим как *W*-область.

Используя операцию разности \ алгебры множеств, обозначим следующим образом области универсума: *U\N*, *U\B*, *U\F*, *U\T*, *t*, *U\t*, *f*, *U\f*, *W*, *U\W*, *T*, *F*, *B*, *N*-области.

Всем этим областям, включая также и универсум, сопоставим 15 истинностных значений U, \N, \B, \F, \T, t, \t, f, \f, W, \W, T, F, B, N, которые могут быть полезны для различных интерпретаций логических систем, основанных на FL4.

3. FL4 и ее сублогики

Для каждой из вышеперечисленных областей можно построить свои логические системы.

Среди подсистем логики FL4 наибольшее значение имеют логические системы, соответствующие подалгебрам FA4.

Теорема о подалгебрах алгебры FA4

Т3.1 *Для алгебры ложности* FA4 *существует только три подалгебры, а именно*: $FA2 = \langle\{T, F\}, -, \to\rangle$,

$FA3B = \langle\{T, F, B\}, -, \to\rangle$, $FA3N = \langle\{T, F, N\}, -, \to\rangle$.

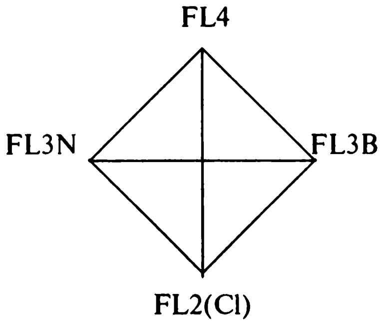
Алгебрам ложности FA3B, FA3N, FA2 соответствуют логики FL3B, FL3N, FL2, определяемые следующим образом.

Логику, получаемую присоединением к аксиомам FL4 формулы $(\vert A \vee -A)$, назовем FL3B.

Логику, получаемую присоединением к аксиомам FL4 формулы $(-\vert A \vee --A)$, назовем FL3N.

Логику, получаемую присоединением к аксиомам FL4 формулы $(\lceil A \vee \rceil A)$, назовем FL2.

Соотношение логик ложности выражается следующей диаграммой.



Обсудим соотношения логики ложности FL4 и ее сублогик с рядом известных логик.

Среди логик истины фон Вригта, наболее близкой к FL4, является T″LM (см. подробнее в [8]).

Четыре истинностных значения логики Белнапа [1] близки по смыслу истинностным значениям в интерпретации FL4.

Таблица истинности для отрицания ~ (D1.4.2) подобна таблице истинности этой связки в логике Белнапа.

Определим конъюнкцию & и дизъюнкцию[4] V в языке FL4, таблицы истинности которых подобны таблицам истинности этих связок в логике Белнапа.

D3.1.1 (A & B) $=_{df}$ ~(A → ~B)

D3.1.2 (A V B) $=_{df}$ (~A → B)

&	0	1	2	3
0	0	0	0	0
1	0	1	0	1
2	0	0	2	2
3	0	1	2	3

V	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	1	3	3
2	2	3	2	3
3	3	3	3	3

Для импликации → и связок ~, &, V имеются следующие соотношения.

T3.2.1 (A → B) ≡ ~(A & ~B)

T3.2.2 (A → B) ≡ (~A V B)

Эти теоремы показывают, что в логике Белнапа через отрицание ~ и конъюнкцию & или через отрицание ~ и дизъюнкцию V можно определить импликацию, аналогичную исходной импликации логики FL4

Отсюда следует, что достаточно к исходным связкам логики Белнапа добавить оператор, подобный оператору ложности или оператору истинности, чтобы получить логику, функционально эквивалентную FL4.

Также в языке FL4 определяется импликация логики Белнапа, таблица истинности которой приведена ниже.

D3.2 (A $\rightarrow^{B}$ B) $=_{df}$ ((|A → |B) & (– –A → – –B))

---

[4] Обращаем внимание на графические отличия вновь вводимого символа от символа дизъюнкции в D1.3.2.

$\to^{B}$	0	1	2	3
0	3	3	3	3
1	0	3	0	3
2	0	0	3	3
3	0	0	0	3

Истинностная таблица для импликации $\to^{B}$ подобна таблице, предложенной Т.Смайли для логики тавтологических следований E_{fde}.

Отметим также, что импликация $\to^{B}$ соответствует отношению порядка строгой истинности.

С помощью импликации $\to^{B}$ покажем тонкое различие между отрицанием и оператором строгой ложности, не выявляемое с помощью импликации $\supset$.

T3.3 $\quad ⅂A \equiv {\sim}A$

T3.4.1 $\quad ⅂A \to^{B} {\sim}A$

T3.4.2 Не имеет места, что ${\sim}A \to^{B} ⅂A$

Логику Клини со связками в сильном смысле имеет смысл сравнивать с логикой FL3N (подробнее см. в [8]).

Таблицы истинности для импликации логики Клини соответствуют таблицам истинности для исходной импликации логики FL3N.

Таблицы истинности для отрицания, конъюнкции и дизъюнкции логики Клини соответствуют таковым в логике FL3N, детерминируемым определениями D1.4.2, D3.1.1 - 2.

Поэтому для того, чтобы получить логику, функционально эквивалентную FL3N, достаточно к исходным связкам логики Клини добавить оператор, эквивалентный оператору ложности или оператору истинности.

Также отметим, что FL2 эквивалентна Cl.

4. FL3N и трехзначная логика Лукасевича

А.С.Карпенко обратил внимание на функциональную эквивалентность трехзначной логики Лукасевича $Ł_3$ и логики ложности FL3N.

Сопоставим трехзначную логику Лукасевича логике FL3N.

Лукасевич вводит третье значение истинности $^1/_2$, исходя из утверждений "... существуют высказывания, которые не являются ни истинными, ни ложными, а лишь только *безразличными.*", "Используя не совсем точную философскую терминологию, можно было бы сказать, что этим высказываниям онтологически не соответствует ни бытие, ни небытие, но лишь *возможность.* Безразличные высказывания, которым онтологически соответствует возможность, имеют третье значение." [5]. Он конструирует логику $Ł_3$, в которой исходными связками являются $\to^Ł$ и отрицание ~, задаваемые следующими истинностными таблицами, где 0 - ложь, 1 - истина.

A	~A
0	1
$^1/_2$	$^1/_2$
1	0

$\to^Ł$	1	$^1/_2$	0
0	1	1	1
$^1/_2$	$^1/_2$	1	1
1	0	$^1/_2$	1

Ни истинным, ни ложным высказываниям, то есть *безразличным,* в логике Лукасевича соответствуют ни истинные, ни ложные высказывания, то есть индифферентные I, в логике ложности FL3N. Таким образом 1, $^1/_2$, 0, соответствуют T, I, F.

Импликация Лукасевича $\to^Ł$ определяется в FL3N следующим образом:

D4.1 $(A \to^Ł B) =_{df} (A \to B) \vee (A \to^B B)$.

Это определение поясняет смысл импликации Лукасевича, показывая что она является дизъюнкцией исходной импликации логики FL3N (импликации Клини) и импликации Белнапа.

Отрицанию и импликации Лукасевича $\to^Ł$ в языке FL3N соответствуют следующие истинностные таблицы.

A	~A
F	T
I	I
T	F

$\to^Ł$	F	I	F
F	T	T	T
I	I	T	T
T	F	I	T

Унарным операторам необходимости N и возможности M логики Лукасевича соответствуют оператор истинности | и оператор отрицания ложности ~ – логики FL3N.

A	NA	MA
0	0	0
$^1/_2$	0	1
1	1	1

A	|A	~ –A
F	F	F
I	F	T
T	T	T

Также и в логике Лукасевича $Ł_3$ определимы связки, соответствующие исходным связкам логики ложности FL3N.

$$(A \to B) =_{df} ((\sim A \to^{Ł} B) \to^{Ł} B)$$

$$-A =_{df} \sim MA$$

Установленные соответствия доказывают теорему.

T4 *Трехзначная логика Лукасевича* $Ł_3$ *функционально эквивалентна логике ложности* FL3N.

5. Обобщение трехзначной логики Лукасевича до четырехзначной

Проведем обобщение трехзначной логики Лукасевича до четырехзначной, отличающееся от обобщения Лукасевича.

Рассмотрим один из вариантов аксиоматизации трехзначной логики Лукасевича, предложенный Слупецким, Брылем и Пруцналем в [12]. Аксиоматизация $Ł_3$ проводится ими в сигнатуре {∨, ~, N}[5]. Будем сокращенно называть это исчисление SBP для удобства отличения его от других аксиоматизаций логики Лукасевича.

Таблицы истинности для отрицания ~ и оператора необходимости N представлены выше, а для дизъюнкции ∨ следующая.

---

[5] Некоторые символы могут совпадать с ранее введенными, но это не должно вести к недоразумениям, так как они используются только в контесте определенных исчислений.

$\vee$	0	$^1/_2$	1
0	0	$^1/_2$	1
$^1/_2$	$^1/_2$	$^1/_2$	1
1	1	1	1

V	F	I	T
F	F	I	T
I	I	I	T
T	T	T	T

Эта таблица соответствует таблице для дизъюнкции V логики ложности FL3N. Поэтому сигнатура {$\vee$, ~, N} соответствует сигнатуре {V, ~, | }.

Связки V, ~, | определены в языке FL4, а четырехзначные таблицы для них представлены выше.

Добавим к трем истинностным значениям логики Лукасевича четвертое значение истинности и обозначим его цифрой 2.

Теперь расширим таблицы для связок $\vee$, ~ N в соответствии с таблицами для V, ~, | .

A	~A	NA
0	1	0
$^1/_2$	$^1/_2$	0
2	2	1
1	0	1

$\vee$	0	$^1/_2$	2	1
0	0	$^1/_2$	2	1
$^1/_2$	$^1/_2$	$^1/_2$	1	1
2	2	1	2	1
1	1	1	1	1

Таким образом задана четырехзначная логика Лукасевича Ł$'_4$ в сигнатуре {$\vee$, ~, N}. При этом таблица истинности для дизъюнкции отличается от таблицы, которая получается для дизъюнкции при четырехзначном обобщении Лукасевича.

Остается показать, что полученное четырехзначное обобщение логики Лукасевича Ł$'_4$ функционально эквивалентно четырехзначной логике ложности FL4. Для этого осталось определить оператор ложности – и импликацию → в соответствии с теоремами T1.3.2 и T3.2.2. Последних соответствий вместе с приведенными ранее достаточно, чтобы доказать теорему.

T5.1 *Четырехзначная логика Лукасевича Ł$'_4$ функционально эквивалентна логике ложности* FL4.

Дополнительный интерес представляет также сопоставление этих логик на синтаксическом уровне.

Для этого приведем формулировку исчисления SBP [12].

В этой работе предлагается определение импликации[6]

$$(p \supset q) =_{\text{df}} \sim\!\mathrm{N}p \vee q\,,$$

для которой имеем следующую таблицу истинности.

$\supset$	0	$^1/_2$	1
0	1	1	1
$^1/_2$	1	1	1
1	0	$^1/_2$	1

Аксиомы SBP

A1 $((p \supset q) \supset r)) \supset ((r \supset p) \supset (s \supset p))$

A2 $(p \supset q) \supset ((p \vee q) \supset q))$

A3 $p \supset (p \vee q)$

A4 $p \supset (q \vee p)$

A5 $p \supset \sim\sim p$

A6 $\sim\sim p \supset p$

A7 $\sim(p \vee q) \supset \sim p$

A8 $\sim(p \vee q) \supset \sim q$

A9 $\sim p \supset (\sim q \supset \sim(p \vee q))$

A10 $\mathrm{N}p \supset p$

A11 $\sim\mathrm{N}\sim(p \vee \sim p)$

A12 $\mathrm{N}p \vee \sim\mathrm{N}p$

Правила вывода: подстановка и modus ponens.

Аксиоме A10 этого исчислении соответствует следующая теорема FL3N.

T5.2 $|A \supset A$ (FL3N)

В то же время формула $|A \supset A$ невыводима в FL4.

[6] См. предыдущую сноску.

На основании последних положений имеет смысл предположение, что исчисление SBP′, полученное из SBP отбрасыванием A10, эквивалентно FL4. Соответствия исходных связок рассмотрены выше.

В заключение отметим, что проведенное рассмотрение показывает, что имеется ряд близких соответствий между исходными и производными связками и операторами таких логик как трехзначная логика Лукасевича, логика Клини с сильными связками, логика Белнапа, логика ложности FL4 и ее сублогика FL3N.

Литература

1. *Белнап Н.* Как нужно рассуждать компьютеру // Белнап Н., Стил Т. Логика вопросов и ответов, М., 1981.
2. *Бочвар Д.А.* Об одном трехзначном исчислении / Математический сборник. 1938. Т.4. N2.
3. *Вригт Г.Х.* Логика истины. // Вригт Г.Х. Лог іко-философские исследования. М. 1986
4. *Карпенко А.С.* Импликативные логики: решетки и конструкции // Логические исследования. Вып. 2. М., 1993. С.224-258
5. *Лукасевич Я.* О детерминизме // Логические исследования. Вып. 2. М., 1993. С. 190-205
6. *Павлов С.А.* Исчисление предикатов истинности и ложности. // Логический анализ естественных языков. 2-ой Советско - Финский коллоквиум по логике. М., 1979.
7. *Павлов С.А.* Логика с терминами 'истинно' и 'ложно' //Философские основания неклассических логик. Труды научно-исследовательского семинара по логике Института философии АН СССР. М., 1990.
8. *Павлов С.А.* Логика ложности FL4 /Труды научно-исследовательского семинара логического центра Института философии РАН. 1993. М., 1994
9. *Павлов С.А.* Классификация трех- и четырехзначных логик в рамках логики ложности FL4 // Логические исследования. Выпуск 3, М., 1995.
10. *Смирнов В.А.* Комбинированные исчисления предложений и событий и логика истины фон Вригта // Исследования по неклассическим логикам. IV Советско-финский коллоквиум. М.,1989
11. *Muskens R.A.* Meaning and partiality. Amsterdam, 1989
12. *Słupecki J., Bryll G., Prucnal T.* Some Remarks on Three-valued Logic of J. Łukasiewicz. // Studia Logica. 1967. Vol. XXI, P.45-70

А.Е.Болотов, В.А.Бочаров, А.Е.Горчаков

Алгорифм поиска вывода в классической пропозициональной логике*

В настоящее время известно большое количество различных процедур автоматического поиска доказательств для классической первопорядковой и даже второпорядковой логики предикатов. Обычно эти алгорифмы строятся либо на базе секвенциальных исчислений, теории резолюций, либо на некотором аппарате, который в той или иной мере близок к данным представлениям логики. Однако во всех этих приемах, позволяющих решить вопрос о выводимости произвольных утверждений, традиционная процедура выведения одних положений из других или вообще не представлена, или осуществляется в таком виде, который весьма далек от того, что понималось под выводом в истории логики. И секвенции, и метод резолюций, и другие способы "выведения" - это скорее алгорифмы проверки общезначимости утверждений, чем вывод. Все они строятся на основе чисто аналитических процедур, в то время как традиционное понятие вывода представляет собой метод синтеза доказуемого утверждения из имеющихся посылок.

Несомненно, если проблема (а часто именно так она стоит и формулируется) заключается в том, чтобы установить, выводимо некоторое утверждение или нет, то вопрос о способах ее решения может оказаться второстепенным. Главным оказывается сам факт доказательства наличия выводимости, быстродействие алгорифма, его сложность, требуемые ресурсы памяти и т.д. Однако имеется и такие ситуации, когда отвлечение от способов получения нужного результата недопустимо. Такими ситуациями являются, например, процедуры обучения студентов навыкам вывода; описание и исследование традиционных способов вывода, скажем, при доказательстве геометрических теорем; исследование психологии творчества, одним из важнейших элементов которого являются процедуры рациональной аргументации - дедукции и т.д.

---

* Работа выполнена при поддержке РГНФ, грант № 96-03-04666.

В 1992 году авторы поставили перед собой задачу осуществить поиск алгорифма вывода и доказательства (как линейной последовательности утверждений) для классической логики высказываний. Работа осуществлялась сотрудниками философского факультета Московского государственного университета им. М.В.Ломоносова и была завершена в 1994 году. Своеобразие предлагаемого ниже алгорифма, реализованного на языке "Си" для IBM PC, состоит в том, что авторам удалось формализовать эвристики, которые, как нам представляется, применяются обычно в естественном рассуждении. Это позволило авторам найти эффективную процедуру для осуществления так называемого субординатного вывода.

В основу дедуктивного аппарата положено натуральное исчисление высказываний Квайна, которое было модифицировано сотрудниками кафедры логики философского факультета МГУ - профессорами Е.К.Войшвилло и В.А.Бочаровым. Выбор именно этого исчисления был обусловлен теми соображениями, что данная система обладает целым рядом дидактических преимуществ - наличие только прямых правил вывода, позволяющих переходить от формул к формулам, простая формулировка понятия вывода, - в силу чего она в течение долгого времени преподавалась и до сих пор преподается на факультете студентам-философам. Система содержит обычный алфавит, обычное понятие формулы и следующие дедуктивные принципы:

Правила вывода:

&в: $\dfrac{A, B}{A \& B}$ &и : $\dfrac{A \& B}{A}$, $\dfrac{A \& B}{B}$

∨в: $\dfrac{A}{A \vee B}$, $\dfrac{B}{A \vee B}$ ∨и: $\dfrac{A \vee B, \quad \neg A}{B}$

⊃в: $\dfrac{B}{C \supset B}$ *- где C - гипотеза*   ⊃и: $\dfrac{A \supset B, \quad A}{B}$

¬в: $\dfrac{B, \quad \neg B}{C}$ *- где C - гипотеза*   ¬и: $\dfrac{\neg\neg A}{A}$

Выводом в системе называется непустая конечная последовательность формул $C_1, C_2, \ldots, C_k$, удовлетворяющая условиям:

(1) каждая C_i есть либо гипотеза, либо получена из предыдущих формул по одному из правил вывода,
(2) если в выводе применялись правила $\supset_B$ или $\neg_B$, то все формулы, начиная с последней гипотезы и вплоть до результата применения данного правила, в дальнейших шагах построения вывода не принимают участия (их дальнейшее применение в выводе исключается).

Вывод $C_1, C_2, \ldots, C_k$ есть вывод вида $A_1, A_2, \ldots, A_n \vdash B$, если $A_1, A_2, \ldots, A_n$ - это неисключенные гипотезы, а формула B графически совпадает с C_k.

Доказательством, как обычно, считается вывод из пустого множества неисключенных посылок.

Далее будем формулы, стоящие в правилах вывода над чертой, называть *посылками правил вывода*, а формулы, стоящие под чертой, - *заключением правил вывода.*

Общая стратегия алгорифмического поиска вывода

Стратегия состоит в том, что по некоторой заданной выводимости создаются две последовательности. Первая последовательность - это последовательность формул $C_1, C_2, \ldots, C_k$, которая и представляет собой формируемый вывод. Формулы, входящие в данную последовательность, называются *формулами вывода*. Вторая же последовательность - это последовательность *целей*, в качестве которых могут выступать либо некоторые конкретные формулы, либо получение в выводе двух произвольных противоречащих друг другу формул. При этом на каждом шаге вывода однозначно задается та цель, которая на данный момент должна быть *достигнута*.

Все правила подразделяются на *аналитические* и *синтетические*. К первым относятся те правила, которые автоматически выполняются в выводе при наличие в нем соответствующих формул. Этими правилами являются $\&$и, $\vee$и, $\supset$и и $\neg$и, т.е. все правила исключения логических связок. Все остальные правила являются синтетическими и их применение регулируется *достижением* некоторой цели, т.е. либо появлением в выводе формулы, которая является последней целью, либо, если целью является противоречие, то появлением в выводе некоторой формулы **A** и ¬**A**.

Общее описание процедур

(**I**) По формулам вывода осуществляются следующие процедуры:

Процедура 1 - формирует последовательность формул вывода; она состоит в нахождении одной или двух формул, к которым применяются соответствующие правила исключения логических связок. Если такие формулы обнаруживаются, то вывод пополняется результатом применения данного правила.

Процедура 2 - формирует новые цели; эта процедура выполняется в том случае, когда все возможные, указанные в процедуре 1, правила вывода применены, последней целью в последовательности целей является "F" (противоречие) и при этом данная цель не достигнута (см. процедуру 3). Какие именно вводятся цели, определяется видом содержащихся в выводе формул, и будет объяснено далее.

Процедура 3 - осуществляет проверку достижимости последней цели в списке целей. Если последней целью является некоторая формула, то она считается достигнутой просто по факту наличия в выводе графически равной ей формулы. Если же последней целью является **F** (противоречие), то она считается достигнутой, если в выводе содержатся формулы вида **A** и ¬**A**. Достигнутая цель из списка целей устраняются, а очередной целью становится предыдущая цель в списке целей.

(**II**) По последовательности целей осуществляются процедуры:

Процедура 4 - формирует подцели, которые помещаются в последовательность целей.

Процедура 5 - выбирает новые дополнительные посылки, помещаемые под очередным номером в последовательность формул вывода.

Процедуры 4 и 5 опишем вместе, так как они в определенных случаях применяются одновременно. Данные процедуры начинают использоваться, когда уже применена процедура 1, целью является некоторая формула, и при этом она не достигнута. В этом случае последовательность целей дополняется новой подцелью или совокупность посылок в выводе дополняется новой посылкой. Что конкретно происходит зависит от вида очередной (последней) цели и будет объяснено в формулировке алгорифма.

Процедура 6 - сигнализирует необходимость автоматического применения в выводе правил введения логических связок. Более детально это описывается ниже.

Описание алгорифма

1. Определяется *главная цель* вывода. Таковой является формула, стоящая справа от знака выводимости. Данная формула помещается в качестве начальной в последовательность целей. Если слева от знака выводимости стоят формулы, то они помещаются в качестве начальных в последовательность формул вывода. Переход к 2.

2. Анализ множества формул вывода.

   2.1. Если множество формул вывода пусто, то переход к 4.

   2.2. Если множество формул вывода непусто, то переход к 3.

3. Умозаключения по формулам вывода.

   3.1. Осуществляются все непосредственные умозаключения по аналитическим правилам; при этом на посылки правил вывода вида **A & B**, **A** $\vee$ **B**, **A** $\supset$ **B**, $\neg\neg$**A**, к которым были применены, соответственно, правила &и, $\vee$и, $\supset$и и $\neg$и, ставиться *метка* "V0", указывающая на недопустимость вторичного применения к ним указанных правил, а на заключения правил вывода ставиться метка "V+1" (смысл этой метки разъясняется далее). Переход к 9.

   3.2. Если ни одно аналитическое правило не применимо, то - 9.

4. Анализируется главный знак очередной цели - **W**.

   4.1. **W** - пропозициональная переменная. Переход к 5.

   4.2. Главный знак **W** - $\neg$. Переход к 5.

   4.3. **W = Wi** $\supset$ **Wj**. Переход к 6.

   4.4. **W = Wi & Wj**. Переход к 7.

   4.5. **W = Wi** $\vee$ **Wj**. Переход к 8.

   4.6. Цель **W** - противоречие. Переход к 11.

5. $\neg$**W** включается в последовательность формул вывода в качестве *посылки*, *подцелью* становится получение противоречия, тип устраняемости - $\neg$. Переход к 3.

6. Формула **Wi** включается в последовательность формул вывода в качестве посылки, подцелью становится **Wj**, а тип устраняемости - $\supset$. Переход к 3.

7. **Wi** становится подцелью.

7.1. Подцель - **Wi**.
Если **Wi** *достижима*, то переход к 7.2.
В противном случае - 4.

7.2. Подцелью становиться **Wj**.
Если **Wj** *достижима*, то - 9.
В противном случае - 4.

8. **Wi** становится подцелью.

8.1. Цель - **Wi**, метка цели - "V1".
Если цель **Wi** *достижима*, то 9.
В противном случае - 8.2.

8.2. Цель - **Wj**, метка цели - "V2".

Из последовательности целей устраняются все подцели, начинаюшиеся с метки "V1", а из последовательности формул вывода все формулы, начиная с посылки, соответствующей этой отмеченной цели.

Если цель **Wj** достижима, то - 9.
В противном случае - 8.3.

8.3. Из последовательности целей устраняются все подцели, начинаюшиеся с метки "V2", а из последовательности формул вывода все формулы, начиная с посылки, соответствующей этой отмеченной цели.

Если на цели **Wi** $\vee$ **Wj** не стоит метка "V-1" (об ее смысле будет сказано ниже), то формула $\neg$(**Wi** $\vee$ **Wj**) берется в качестве новой посылки, тип устраняемости - $\neg$, а в качестве подцели берется противоречие. Переход к 3.

В противном случае осуществляется временный выход из доказательства исходного метаутверждения, цель **Wi** $\vee$ **Wj** устраняется, а в качестве новой цели берется формула $\neg$**Wi** & $\neg$**Wj** и осуществляется вывод $\neg$(**Wi** $\vee$ **Wj**) $\vdash$ $\neg$**Wi** & $\neg$**Wj**. Переход к 3.

9. Достигнута цель **Wn**.

9.1. Если **Wn** - *главная цель*, то **Wn** помечается как *достигнутая*, выход - выводимость обоснована.

9.2. Если **Wn** - противоречие, то **Wn** как цель устраняется, новой целью становиться предыдущая цель, а к формулам вывода применяется правило $\neg$в. Результатом является формула $\neg$**B**, где **B** - последняя посылка в выводе, и делается отметка, что все формулы, начиная с **B** и заканчивая формулой, предшествующей $\neg$**B**, в дальнейших шагах вывода принимать участия не могут. Если в число этих формул попадает формула с меткой "V+1", являющаяся заключением некоторого правила вывод, то с соответствующей формулы, являющейся посылкой данного применения правила вывода, снимается метка "V0". Переход к 3.

9.3. Если предыдущей к достигнутой цели **Wn** является цель **Wn-1** = **Wn** $\vee$ **Wk** или **Wk** $\vee$ **Wn**, то из последовательности целей устраняются цели **Wn** и **Wn-1**, новой целью становится предыдущая цель, а в последовательность формул вывода включается формула **Wn-1**, которая является результатом применения правила $\vee$в к формуле **Wn**. Если на цели **Wn-1** стояла метка "V-1", то с *формулы вывода, породившей данную цель* (об этом будет сказано ниже) снимается метка "V-1". Переход к 3.

9.4. Если предыдущей к достигнутой цели **Wn** является цель **Wn-1** = **Wk** $\supset$ **Wn**, то к формуле вывода **Wn** применяется правило $\supset$в. Цели **Wn** и **Wn-1** помечаются как достигнутые. Очередной целью становится ближайшая ранее не достигнутая цель, и в последовательности формул вывода делается отметка, что все формулы, начиная с **Wk** и заканчивая формулой **Wn**, в дальнейших шагах вывода принимать участия не могут. Если в число последних формул попадает формула с меткой "V+1", являющаяся заключением некоторого правила вывода, то с соответствующей формулы, являющейся посылкой данного применения правила вывода, снимается метка "V0". Если на цели **Wn-1** стояла метка "V-1", то с *формулы вывода, породившей данную цель* снимается метка "V-1". Переход к 3.

9.5. Если предыдущей к достигнутой цели **Wn** является цель **Wn-1** = **Wk** & **Wn**, то к формулам вывода **Wk** и **Wn** применяется правило &в. Цели **Wn** и **Wn-1** помечаются как достигнутые. Очередной целью становится ближайшая ранее не достигнутая цель, и в последовательности формул вывода на формулу **Wk** & **Wn** ставится метка "V0". Если на цели **Wn-1** стояла метка "V-1", то с *формулы вывода, породившей данную цель* снимается метка "V-1". Переход к 3.

9.6. Если последней целью **Wn** является формула и она не достигнута, то 4.

10. Выбор новых целей по формулам вывода.

Просматриваются сверху вниз все формулы последовательности формул вывода.

Если в последовательности имеются сложные формулы, не отмеченные метками "V0" или "V-1", то к ним применяются следующие процедуры:

10.1. Если в выводе имеется импликативная формула вида **Wi** ⊃ **Wj**, то в качестве подцели берется **Wi**. Формулы **Wi** ⊃ **Wj** и **Wi** помечаются метками "V-1". Переход к 4.

10.2. Если в выводе имеется дизъюнктивная формула вида **Wi** ∨ **Wj**, то в качестве подцели берется ¬**Wi**. Формулы **Wi** ∨ **Wj** и ¬**Wi** помечаются метками "V-1". Переход к 5.

10.3. Если в выводе встречается формула ¬**Wi**, то в качестве цели берется **Wi**. Формулы ¬**Wi** и **Wi** помечаются метками "V-1". Переход к 7.

В противном случае - завершение программы (утверждение нельзя обосновать).

11. Алгоритм поиска противоречий.

В последовательности формул вывода ведется поиск формулы, у которой главный знак - отрицание. Определяется длина этой формулы и проверяется, имеется ли в последовательности формула, длина которой на единицу меньше данной и являющуюся подформулой данной формулы. Найденные формулы составляют члены противоречия. Переход к 9.

Если в последовательности формул вывода противоречие не найдено, то переход к 10.

Несколько слов о программе, реализующей описанный алгоритм. Программа написана на языке высокого уровня "Си" для компьютеров типа IBM PC AT. Программа занимает на диске 140 кбайт, время работы над доказательством тестированных теорем не превышает 4 сек. для персонального компьютера на базе процессора INTEL-386-DX с тактовой частотой 40 МГЦ. Программа имеет пользовательский интерфейс и может читать заранее заготовленные формулы из файла. Тестирование проводилось на множестве формул, выбранных из учебников по математической логике, в частности, из книги А.Черча "Введение в математическую логику". Это множество - около ста теорем классической логики - достаточно репрезентативно, что позволяет рассматривать предложенный алгоритм поиска вывода для натурального исчисления высказываний как эффективную процедуру осуществления субординатных выводов.

Ниже приводится доказательство закона Пирса, которое осуществлено компьютером в автоматическом режиме на основе описанного алгоритма. Данная теорема взята из множества примеров, на которых отлаживалась компьютерная программа.

Требуется доказать: $((p \supset q) \supset p) \supset p$

0.	$(p \supset q) \supset p$,	посылка
1.	$\sim p$,	посылка
2.	p,	посылка
3.	$\sim q$,	посылка
4.	$\sim\sim q$,	$\sim$в из 1, 2
5.	q,	$\sim$и, из 4
6.	$p \supset q$,	$\supset$в 2 к 5
7.	p,	$\supset$и, из 0, 6
8.	$\sim\sim p$,	$\sim$в из 1, 7
9.	p,	$\sim$и, из 8
10.	$((p \supset q) \supset p) \supset p$,	$\supset$в 0 к 9

Объясним шаги вывода, строившегося по описанному выше алгоритму. Так как требуется доказать формулу $((p \supset q) \supset p) \supset p$, то исходный список вывода пуст, а главной целью является сама эта формула. По этой формуле, согласно пункту 4, начинает формироваться последовательность формул вывода и в качестве первой посылки берется формула $(p \supset q) \supset p)$, а целью становится формула p. Так как эта цель не достижима, то опять по пункту 4 в вывод помещается посылка $\neg p$, а целью становится F. Цель F не достижима, а поэтому по процедуре 9 первая посылка служит источником новой цели, которой становится формула $p \supset q$. Вновь по 4 в качестве новой посылки берется формула p, а в качестве новой цели - формула q. Опять-таки, последняя цель не достижима, а поэтому по 4 берется новая посылка $\neg q$, а новой целью становится F. На этом шаге автоматического поиска вывода машина устанавливает, что цель F достигнута, так как в выводе имеется противоречие - формулы p и $\neg p$ (шаги вывода 1 и 2). Это служит сигналом для применения в выводе правила "введения отрицания". Именно таким образом в выводе появляется 4-й шаг - формула $\neg\neg q$. При этом все формулы, начиная с последней посылки (формулы 3) и вплоть до результата применения этого правила считаются из вывода устраненными (что помечено слева от номеров шагов вертикальной линией, длина которой равна числу строчек исключаемых формул). Заметим, что хотя в выводе уже ранее содержалось противоречие, это правило не применялось, так как на это не указывала никакая из целей. Цель F, так как она достигнута, исключается и целью становится предыдущая цель - формула q. Формула q легко достигается, так как к 4 шагу можно применить правило "исключения отрицания". Достижение формулы q служит сигналом для автоматического применения правила "$\supset$в", что дает формулу 6 вывода.

Остальные шаги вывода очевидны и могут быть легко восстановлены по аналогии с рассмотренными.

Г.И. Горемыкина

Интуиционистские варианты классических теорем

В работе исследуется традиционная проблема интуиционистской логики о переходе от выводимости некоторого суждения S в классической теории к выводимости этого же суждения S или нового суждения S' (близкого по смыслу к исходному суждению S) в соответствующей интуиционистской теории. В качестве таких теорий выбираются классическая и соответственно интуиционистская теория множеств.

Содержание

1. Введение
2. Переход от выводимости в ZF формул языка *l*-колец к их выводимости в ZFI
2.1. Оценивание в языке *l*-колец
2.2. Перевод φ в φ_e
2.3. Нестандартное представление *l*-кольца в V^{Ω} V^{B}
2.4. Переход от выводимости в ZF к выводимости ZFI
3. Перевод классической теории в интуиционистскую для алгебраических систем с R- нормой
3.1. Алгебраические системы языка первого порядка
3.2. Алгебраические системы в V^{Ω}
3.3. Свойства полуабсолютных алгебраических систем с R-нормой
3.4. Интуиционистский вариант теоремы Ритта

1. Введение

В [4] В.А.Любецким и в [10] Г.Такеути и С.Титани предложен новый подход к развитию математики в интуиционистской теории множеств ZFI. Суть его состоит в семантическом оценивании формул элементами некоторых алгебр.

Пусть ZFI - интуиционистская теория множеств, предложенная в [2] Р.Грейсоном. Пусть Ω - полная гейтингова алгебра (сокращенно cHa) в ZFI. Гейтинговозначный универсум

V^Ω (это модель ZFI) определяется в ZFI как $\bigcup V^\Omega_\alpha$, где On - класс всех ординалов, а V^Ω_α - множество всех Ω-значных функций f с областью определения $D(f)\subseteq V^\Omega_\beta$, $\beta\in\alpha$.

Пусть $F(V\ )$ - множество всех формул языка ZF с параметрами из V^Ω. Тогда оценкой в языке ZF для cHa Ω называют одноместную функцию вида $[.]^\Omega : F(V^\Omega)\to\Omega$. Логические связки языка ZF моделируются операциями в cHa Ω. Значение оценки для атомарных формул определяется следующим образом:

$$[\int \in g]^\Omega = \vee^\Omega_{x\in D(g)} g(x)\wedge[\int = x]^\Omega;$$

$$[\int = g]^\Omega = \wedge^\Omega_{x\in D(g)}[\int(x)\to[x\in g]^\Omega]\wedge \wedge^\Omega_{y\in D(g)}[g(y)\to[y\in\int]^\Omega].$$

Значение оценки $[\varphi]^\Omega$ для неатомарной формулы φ определяется индукцией по числу логических символов в φ.

Класс "всех множеств" V вкладывается в универсум V^Ω. Это вложение осуществляется с помощью отображения $(.)^\vee : V\to V^\Omega$, которое каждому X из V ставит в соответствие элемент $X^\vee$ из V^Ω, такой, что $D(X^\vee)=\{\overset{\vee}{x}\,|x\in X\}$ и $\forall x\in X(X^\vee(\overset{\vee}{x})=1)$.

Если X является подмножеством V^Ω и X - множество, то через $\underline{X}$ обозначают такой элемент универсума V^Ω, что $D(\underline{X})=\{x|x\in X\}$ и $\forall x\in D(\underline{X})(\underline{X}(x)=1)$. Указанный переход от X к $\underline{X}$ и называют операцией подчеркивания.

Каждая cHa W вложима в полную булеву алгебру (сокращенно cBa) B. Одно из таких вложений описано в [4]. Обозначим его через I. Оно (согласно [4]) обладает следующими свойствами:

1)$\forall u,v\in\Omega(\ I(u)=I(v)\Rightarrow u=v\ )$;

2)$I(0^\Omega)=0^B,\ I(1^\Omega)=1^B$;

3)$\forall u,v\in\Omega(\ I(u\wedge^\Omega v)=I(u)\wedge^B I(v))$;

4)$\forall\{u_\alpha\}\subseteq\Omega[I[\bigvee^\Omega u_\alpha\ =\bigvee^B I(u_\alpha)$.

(Надстрочные символы показывают, в какой алгебре вычисляется соответствующая операция.)

Каждая полная булева алгебра является полной гейтинговой алгеброй. Поэтому свойства, которыми обладает отображение $I: \Omega \to B$, свидетельствуют о том, что оно является инъективным cHa-морфизмом. Но тогда (согласно [9]) отображению I(как cHa-морфизму) присущи такие свойства, как:

1) $\forall\{u_\alpha\}\subseteq\Omega\ [I[\wedge^\Omega u_\alpha \le \wedge^B I(u_\alpha)]$;

2) $\forall u\in\Omega(I(\neg^\Omega u) \le \neg^B I(u))$;

3) $\forall u,v\in\Omega(I(u \to^\Omega v) \le I(u) \to^B I(v))$.

Отождествляя Ω с ее образом, получим, что операции $\wedge$, $\vee$, $\bigvee$ в Ω и B совпадают; $0^\Omega = 0^B$, $1^\Omega = 1^B$; $\forall u, v\in\Omega$ $(u\to^\Omega v \le u\to^B v)$ и $\forall\{u_\alpha\}\in\Omega$ $[\bigwedge^\Omega u_\alpha \le \bigwedge^B u_\alpha]$.

Отображение $I: \Omega\to B$ индуцирует отображение $I^*: V^\Omega \to V^B$ (где V^B - модель классической теории множеств ZF), определяемое следующим образом. Пусть $f\in V^\Omega$. Положим:

$D^*(I(f)) = \{I^*(x)|x\in D(f)\}$,

$\forall x\in D(f)\ [I^*(f)(I^*(x)) = \{I(f(t))|t\in D(f),\ I^*(t)=I^*(x)\}]$.

Отметим, что отображение I обладает следующими свойствами. Пусть f, g - произвольные элементы универсума V^Ω. Тогда

1) $I\ [[f\in g]^\Omega] \le [I^*(f) \in I^*(g)]^B$;

2) $I\ [[f=g]^\Omega] \le [I^*(f)=I^*(g)]^B$;

3) $[I^*(\{f, g\})=\{I^*(f), I^*(g)\}]^B =1$, $[I^*(<f, g>)=<I^*(f), I^*(g)>]^B =1$.

Отождествляя V^Ω с его образом, получим:

1) $[f\in g]^\Omega \le [f\in g]^B$; 2) $[f=g]^\Omega \le [f=g]^B$;

3) $[x=\{f, g\}]^\Omega \le [x=\{f, g\}]^B$, $[x=<f, g>]^\Omega \le [x=<f, g>]^B$.

Свойства отображений I и I свидетельствуют о том, что Ω-значные и B-значные оценки между собой непосредственно связаны. Это дает возможность получать некоторые интуиционистские утверждения в области алгебры и анализа в V^Ω путем рассмотрения соответствующих теорем в V^B. Это избавляет от необходимости проводить сложные интуиционистские рассуждения в каждом отдельном случае (если они и вообще прослеживаемы).

Например, используя метод семантического оценивания, В.А.Любецкий построил широкий класс формул в языке колец, для которых из выводимости в классической теории множеств ZF следует их выводимость в ZFI, а Г.Такеути и

С.Титани развили некоторый новый вариант интуиционистского математического анализа (ср. Б.А.Кушнер, А.С.Трулстра).

В работе на основе метода семантического оценивания строится класс формул в языке *l*-колец, для которых из выводимости в ZF следует их выводимость в ZFI, а также формулируются и доказываются интуиционистские варианты некоторых классических теорем алгебры.

2. Переход от выводимости в ZF формул языка l-колец к их выводимости в ZFI

2.1. *Оценивание в языке l-колец*

Алгебраическую систему $M = \langle M, +, ., -, \leq, 0 \rangle$ называют *l*-кольцом, если $\langle M, +, ., -, 0 \rangle$ -кольцо, $\langle M, \leq \rangle$ - решетка и M - модель аксиом вида:

1) $\forall \alpha \forall b \forall c (a \leq c \Rightarrow \alpha + c \leq b + c)$;

2) $\forall a \forall b \forall c (a \leq b \ \& \ 0 \leq c \Rightarrow \alpha \bullet c \leq b \bullet c \ \& \ c \bullet a \leq c \bullet b)$.

L-идеалом *l*-кольца M называют непустое подмножество i $\subseteq M$, такое, что:

1) $\forall a, b \in i (a \pm b \in i)$;

2) $\forall a, b \in i \ \forall c \in M (a \leq c \leq b \Rightarrow c \in i)$;

3) |a(i |b(M(aVb(i & bVa(i).

Пусть I(M) - множество всех L-идеалов фиксированного *l*-кольца M. Положим $\bigvee i_\alpha = \Sigma i_\alpha$; $i \wedge j = i \cap j = i \& j$; $\{0\}$ -нуль, обозначаемый $\bar{\mathbf{0}}$ или 0; M -единица, обозначаемая $\bar{\mathbf{1}}$ или 1. Тогда алгебраическая система $I(M) = \langle I(M), \bigvee, \wedge, \bar{\mathbf{1}}, \bar{\mathbf{0}} \rangle$ является cHa.

Элемент $i \in I(M)$ назовем дополняемым, если существует L-идеал j, такой, что $i \vee j = \bar{\mathbf{1}}$ и $i \wedge j = \bar{\mathbf{0}}$. Определим в cHa I(M) псевдодополнение $i^{\perp}$, как наибольший L-идеал, для которого $i \wedge i^{\perp} = \bar{\mathbf{0}}$.

Обозначим через Com(M) множество всех дополняемых L-идеалов. Это множество является булевой подрешеткой решетки I(M).

Для любого дополняемого L-идеала i определим ограничение $M_r i$ l-кольца M на i, положив $M_r i = \{u \in i | \exists \alpha \in M \exists v \in i^{\perp}, (\alpha = u+v)\}$.

При этом элемент $u \in M_r i$ будем называть ограничением α на i и обозначать через $a_r i$. Конечно, $a = a_r i + a_r i^{\perp}$.

Применим к булевой алгебре Com(M) конструкцию, описанную в [5]. В результате получим следующую цепочку вложений:

$$\mathrm{Com}(M) \subseteq T(M) \subseteq B(M) \subseteq A(M),$$

где $T(M)$ -сНа всех идеалов в Ва Com(M); A(M) -сНа всех J-операторов на T(M); B(M) -алгебра стабильных элементов из T(M).

Пусть L -язык l-колец. Пусть [FA] (L,M) - множество всех атомарных предложений, а F(L,M) -множество всех предложений языка L с множеством M в качестве семейства параметров. Определим отображение $[.]^{T(M)} : [FA] (L,M) \to T(M)$, для любых $a,b \in M$ положив $[a=b]^{T(M)} = \{i \in \mathrm{Com}(M) | a_r i = b_r i\}$; $[a<b]^{T(M)} = \{i \in \mathrm{Com}(M) | a_r i < b_r i\}$.

Продолжим указанное отображение на F(L,M). Сделаем это индукцией по правилам образования предложений. Полученное отображение назовем T-оценкой в языке l-колец. Оценка $[.]^{B(M)}$, называемая B-оценкой, определяется аналогично.

Начиная с этого места, все утверждения понимаются нами как утверждения о выводимости соответствующих формул языка ZF в интуиционистской теории множеств ZFI.

Предложение 1. *Для любого l-кольца M оценка* $[.]^{T(M)}$ *является* 1) *отделимой,* 2) *пучковой и* 3) *достижимой.*

Доказательство. 1) Пусть $[a=b]^{T(M)} = \bar{1}$. Так как $1 \in \bar{1}$, то $a_r 1 = b_r 1$. Но 1 - дополняемый L-идеал, следовательно, $1 \vee 1^{\perp} = 1$, или $1^{\perp} \leq 1$. Тогда $a_r 1^{\perp} = (a_r 1\ r 1^{\perp} = (b_r 1)\ r 1^{\perp} = b_r 1^{\perp}$. Отсюда $\alpha = \alpha_r 1 + \alpha_r 1^{\perp} = b_r 1 + b_r 1^{\perp} = b$. Проверка для случая $[a \leq b]^{T(M)} = 1$ аналогична.

Предложение 2. *Для любого l-кольца M оценка* $[.]^{T(M)}$ *замкнута относительно интуиционистской выводимости в теории l-*

колец, а оценка $[.]^{B(M)}$ *замкнута относительно классической выводимости в теории l-колец.*

Доказательство. [illegible] $[.]^{\Omega}$ и $[.]^{B}$ - оценки со значениями соответственно в [illegible] B, то $[.]^{\Omega}$ замкнута относительно интуиционистской [illegible]сти, а $[.]^{B}$ - относительно классической выводимости. [illegible] *M)* - cHa, а B(M) - cBa, *l*-кольцо *M* назовем нормальным, если оценка [.] является элементарной (т.е. ее значением на любом атомарном предложении является булев элемент).

Формула называется фи-формулой ([5]), если в посылке любой ее импликации нет квантора $\forall$, а квантор $\exists$ не входит в область действия какой-либо связки $\Rightarrow$.

Предложение 3. *Пусть M - нормальное l-кольцо,* $\overline{\alpha}$ *- параметры из M.*

1) *Для любого фи-предложения* $\varphi(\overline{\alpha})$ *выполняется*

$[\varphi(\overline{\alpha})]^{T(M)} \le [\varphi(\overline{\alpha})]^{B(M)}$.

2) Для любого AE-предложения $\varphi\overline{\alpha}$ и для любого $u \in T(M)$ выполняется: если $u \le [\varphi(\overline{\alpha})]^{B(M)}$, то и $\le [\varphi(\overline{\alpha})]^{T(M)}$.

Доказательство. 1) Применим индукцию по длине формулы φ. Если φ - атомарная, то $[\varphi]^{T} = [\varphi]^{B}$. Если $\varphi = \psi \,\&\, \theta$ или $\psi \vee \theta$ или $\exists \overline{x}\, \psi$ или $\forall \overline{x}\, \psi$, то в силу того, что операции $\wedge$, v, $\bigvee$ в T(M) и B(M) совпадают, а $\forall X \subseteq T(M)(\bigwedge^{T} X \le \bigwedge^{B} X)$, получим $[\varphi]^{T}$ $[\varphi]^{B}$. Пусть $\varphi = \psi \Rightarrow \upsilon$. Т.к. v является фи-формулой, то j - бескванторная. В силу нормальности M, оценка $[.]^{T}$ - элементарная. Поэтому $[\psi]^{T}$ -булев элемент из B(M), и следовательно, $[\psi]^{T} = [\psi]^{B}$. В то же время $u \wedge [\psi]^{B} \le [\upsilon]^{B}$. Отсюда, обозначив через u оценку $[\psi \Rightarrow \upsilon]^{T}$, получаем $u \wedge [\psi]^{B} = u \wedge [\psi]^{T} \le [\upsilon]^{B}$, или $u \le [\psi \Rightarrow \upsilon]^{B}$.

2) Пусть $\varphi = \exists \overline{x}\, \psi$. Тогда $[\varphi]^{T} = \bigvee^{T}\{[\varphi(\overline{\alpha})]^{T} \mid \overline{\alpha} \in M\}$. Но sup в T(M) совпадает с sup в B(M) и ψ -бескванторная. Поэтому $[\varphi]^{T} = \bigvee^{B} \{[\psi(\overline{\alpha})]^{B} \mid \overline{\alpha} \in (M\} = [\varphi]$. Пусть $\varphi = \forall \overline{x}\, \psi$ и $u \le [\varphi]^{B}$, где φ -E-формула. Тогда $u \le [\psi(\overline{\alpha})]^{B} = [\psi(\overline{\alpha})]^{B}$, и, следовательно, $u \le [\forall \overline{x}\, \psi]^{T}$.

2.2. *Перевод* φ *в* φ_e'.

Пусть Idc(M)=<Idc(M), $\wedge$, v, $\neg$, 0, 1> - булева алгера всех центральных идемпотентов *l*-кольца M с единицей.

Предложение 4. *Пусть M - любое l-кольцо с единицей, в котором всякий центральный идемпонент ≥ 0.*

Тогда булевы алгебры Idc (M) и Com(M) изоморфны.

Доказательство. Подмножество $e \bullet M \subseteq M$ является дополняемым L-идеалом *l*-кольца M. Поэтому изоморфизм может быть задан следующим образом: $f: e \rightarrow e \bullet M$ $(e \in Idc(M))$.

Если условие нормальности *l*-кольца M можно записать формулой: $\forall a \in M \exists e_0 \in Idc(M) \forall e \in Idc(M)$ $(e \bullet a = 0 \Leftrightarrow e \leq e)$, то M будем называть l-кольцом с обычным условием нормальности. Любое *l*-кольцо, удовлетворяющее условию предложения 4, является *l*-кольцом с обычным условием нормальности.

Пусть $\varphi(\overline{\alpha})$ - любая формула в языке *l*-колец с параметрами a из *l*-кольца M. Определим перевод этой формулы в формулу $\varphi_e(\overline{\alpha})$ того же языка. Положим $(a=b)_e = a \bullet e = b \bullet e$, $(a \leq b)_e' = a \bullet e \leq b \bullet e$, $(\varphi \ \& \ \psi)_e = \varphi_e \ \& \ \psi_e$, $(\varphi \vee \psi)_e = \exists e_1, e_2 \ ((e=e_1 \vee e_2) \ \& \ \varphi_{e1}' \ \& \ \varphi_{e2}')$, $(\varphi \Rightarrow \psi) \dashv \forall e_0 \ ((e_0 \leq e \ \& \ \varphi_{e0}') \Rightarrow \varphi_{e0}')$, $(\exists x \varphi)_e' = \exists x \varphi_e'$, $(\forall x \varphi)_e' = \forall x \varphi_e'$.

Обозначим $\varphi'(\overline{\alpha}) = \varphi_e'(\overline{\alpha})$ и $T' = \{\varphi' | \varphi \in T\}$, где T -любое множество формул в языке l-колец. Обозначим через $(\varphi)_M$ интерпретацию формулы φ языка l-колец в l-кольце M.

Предложение 5. *Пусть M - любое l-кольцо с обычным условием нормальности, содержащее* 1. *Тогда для любой формулы φ в языке l-колец с параметрами $\overline{\alpha}$ из M и любого e из Idc(M) выполняется:* $(\varphi_{ó}^{ý}(\overline{\alpha}))_M \Leftrightarrow e \bullet M \ni [\varphi(\overline{\alpha})]^{T(M)}$.

Доказательство. Применим индукцию по длине формулы φ. Для атомарной φ это следует из того, что $e \bullet a = 0 \Leftrightarrow e \bullet M \in \{i \in Com(M) | \ a_r i = 0\}$ и $e \bullet a \geq 0 \Leftrightarrow e \bullet M \in \{i \in Com(M) | \ a_r i \geq 0\}$. Если $\varphi = \psi \vee \upsilon$, то $((\varphi_e')_M \Leftrightarrow \exists e_1, e_2 \ ((e=e_1 \vee e_2) \ \& \ e_1 \bullet M \in [\psi]^T \ \& \ e_2 \bullet M \in [\upsilon]^T) \Leftrightarrow e \bullet M \in [\phi \vee \upsilon]^T)$. Случаи $\varphi = \psi \& \upsilon$ и $\varphi = \forall x \psi$ очевидны. Если $\varphi = \psi \Rightarrow \upsilon$, то $(\varphi_e')_M \Leftrightarrow \forall e_0 \ (e \leq e_0 \Rightarrow (e_0 \bullet M \in [\psi]^T \Rightarrow e_0 \bullet M \in [\upsilon]^T)) \Leftrightarrow \forall e_0 \ (e \leq e_0 \Rightarrow (e_0 \bullet M \in [\psi \Rightarrow \upsilon]^T)) \Leftrightarrow e \bullet M \in [\psi \Rightarrow \upsilon]^T$. Пусть $\varphi = \exists \upsilon \psi$. Тогда $(\varphi_e')_M \Leftrightarrow \exists x (e \bullet M \in [\psi]^T)$, и следовательно,

$(\varphi'_e)_M \Rightarrow e\bullet M\in[\exists x\psi]^T$. Ввиду предложения 1, оценка $[.]^T$ - достижимая. Поэтому $e\bullet M\in[\exists x\psi]^T \Rightarrow \exists x(e\bullet M\in[\psi]^T)$. Отсюда $e\bullet M\in[\exists x\psi]^T \Rightarrow (\varphi_e)_M$.

l-кольцо называется неразложимым, если любой центральный идемпотент этого кольца равен 0 или 1.

Предложение 6. *Пусть M - произвольное неразложимое l-кольцо, содержащее 1. Тогда для любой формулы в языке l-колец с параметрами из M выполняется:*

$$((\varphi(\overline{\alpha})_M \Leftrightarrow [\varphi(\overline{\alpha})]^{T(M)} = \overline{\mathbf{1}}.$$

Доказательство проводится индукцией по длине формулы φ.

Пусть φ имеет вид $a_1 \le a_2$. С учетом предложения 5, $[[\varphi(\overline{\alpha})]^T = \overline{\mathbf{1}}] \Leftrightarrow 1\bullet\alpha_1\le 1\bullet\alpha_2$. Отсюда получаем требуемое. Аналогично для случая равенства. Случаи $\varphi=\psi\ \&\ \upsilon$ и $\varphi=\forall x\upsilon$ очевидны. Пусть $\varphi=\psi\vee\upsilon$. Тогда $[[\varphi]^T=\overline{\mathbf{1}}]\Leftrightarrow\exists e_1, e_2\ [[1=e_1 \vee e_2]\ \&\ e_1 \bullet M\in[\psi]^T\ \&\ e_2 \bullet M\in[\upsilon]^T$. Так как M - неразложимое, то $Idc(M)=\{0,1\}$. Поэтому, с учетом равенства $1=e_1 \vee e_2$, возможны случаи: $e_1=1$ и $e_2=1$; $e_1=1$ и $e_2=0$; $e_1=0$ и $e_2=1$. Отсюда получаем требуемое. Пусть $\varphi=\psi\Rightarrow\upsilon$, $[\varphi]^T=1$ и имеет место $(\varphi)_M$. Тогда $[\psi]^T \le [\upsilon]^T$ и $[\psi]^T=1$. Следовательно, $[\upsilon]^T=1$, и $(\upsilon)_M$. Обратно. Пусть $(\varphi)_M$. Если $[\psi]^T=0$, то $[\psi] \le [\upsilon]^T$, или $[\psi\Rightarrow\upsilon]^T= =1$. Если $[\psi]^T=1$, то $(\psi)_M$. Но имеет место $(\psi\Rightarrow\upsilon)_M$. Следовательно, $(\upsilon)_M$. Тогда $[\upsilon]^T=1$. Отсюда заключаем, что $[\psi\Rightarrow\upsilon]^T=1$. Пусть $\varphi=\exists x\psi$ и $[\varphi]^T=1$. Согласно предложению 1, оценка $[.]^T$ - достижимая. Поэтому $[[\varphi]^T=1]\Leftrightarrow\exists\alpha\in M\ [[\psi(\alpha)]^T=1]$. Но $[\psi(a)]^T=1\Leftrightarrow(\psi(a))_M$. Следовательно, $[\varphi]^T=1\Leftrightarrow(\exists x\psi)_M$.

2.3. *Нестандартное представление l-кольца в V^T и V^B*

Пусть M - l-кольцо с 1. Пусть $T=T(M)$ и $B=B(M)$. Нестандартным представлением l-кольца M в универсуме V^T назовем такой элемент $X\in V^T$, что для любой формулы $\varphi(\overline{x})$ в языке l-колец и любых параметров $\overline{\alpha}\in M$ выполняется $[\varphi\{\overline{\alpha})]^T=[((\varphi(\overline{x}))_X]^T$ (оценка формулы $(\varphi(\overline{x}))_X$ вычисляется в V^T). Заменяя T на B, получим определение нестандартного представления l-кольца M в V^B.

Определим $Ra \in V^T$, положив $D(Ra)=D(M^\vee)$ и $Ra(b^\vee)=[a=b]^T$, где $D(M^\vee)=\{\alpha^\vee \mid \alpha\in M\}$, а затем определим $M^T \in V^T$, положив $D(M^T) = \{R\alpha \mid \alpha\in M\}$ и $M^T(R\alpha)=1$. Заменив сНа T на сВа B, получим определение элемента M^B из V^B. В силу определений, M^T и M^B одинаковы для алгебр T и B. Функции, отношение и константы на M^T определим таким образом: $D(+^T)= =\{<R\alpha, Rb, R\alpha+b> \mid a, b\in M\}$ и $+^T(<R\alpha, Rb, R\alpha+b>=1$ (аналогично для $-^T, \cdot^T$); $D(\leq^T) = \{<R\alpha, Rb> \mid a, b \in M \;\&\; a \leq b\}$ и $\leq^T(<Ra, Rb>) = [a\leq b]^T$; $0^T = R_1$, $1^T = R_1$. Заменяя T на B, получим определение соответствующих объектов на M^B.

l-кольцо M назовем T-l-кольцом, если $\forall\alpha, b \in M(([a^\vee =b^\vee] \leq [\alpha=b]^T) \;\&\; ([\alpha^\vee \leq b^\vee]^T \leq [\alpha\leq b]^T))$. Аналогично (с соответствующей заменой T на B) определяется B-l-кольцо.

Предложение 7. *Пусть M - любое l-кольцо с единицей. Тогда* 1) *если M является T-l-кольцом, то M^T является нестандартным представлением M* в *универсуме V^T*; **2)** *Если M является B-l-кольцом, то M^B есть нестандартное M в V^B.*

Доказательство. Индукцией по длине формулы φ. Пусть φ - атомарная. Разберем случаи, когда φ имеет вид $a=c$, $a\leq c$, $a+b=c$. Имеем $Ra(b^\vee) \leq [b^\vee\in Ra]^T$. Но M есть T-l-кольцо. Поэтому $[b\ {}^\vee\in Ra]^T = \bigvee\{Ra(x^\vee)\wedge[b^\vee=x^\vee]^T \mid x\in M\} \leq \bigvee\{[\alpha=x]^T \wedge[b=x]^T \mid x\in M\}\leq [a=b]^T = Ra(b^\vee)$. Таким образом, $Ra(b^\vee) \leq [b \in Ra]^T$. Отсюда $[Ra=Rc]^T =\bigwedge\{Ra(b^\vee) \Leftrightarrow Rc(b^\vee) \mid b\in M\}$. Тогда $[Ra=Rc]^T \leq (Ra(a^\vee) \rightarrow Rc(a^\vee)) = [a=c]^T$. С другой стороны, $[a=c]^T \wedge Ra(b^\vee) \leq [c=b]^T =Rc(b^\vee)$, откуда $[a=c]^T \leq [Ra=Rc]^T$. Так как $\leq^T(<Ra, Rc>) \leq [Ra, Rc>\in\leq^T]^T$, то, с учетом определения $\leq^T$, имеем $[a\leq c]^T \leq [(a\leq c)_{M}T]^T$. Но с другой стороны, $[(a\leq c)_{M}T]^T=$

$\bigvee\{\leq^T(<Rx, Ry>) \wedge [<Rx, Ry>=<Ra, Rc>]^T \mid <Rx, Ry>\in D(\leq^T)\}=\bigvee\{[x\leq y]^T \wedge [x=a]^T \wedge [y=c]^T \mid x, y\in M\} \leq [a\leq c]^T$. Пусть $[(a+b=c)_{M}T]^T =u$. Тогда $u=\bigvee\{+^T(<Rx, Ry, Rx+y>) \wedge [<Rx, Ry, Rx+y>=<Ra, Rb, Rc>]^T \mid <Rx, Ry, Rx+y> \in D(+^T)\} = \bigvee\{[x=a] \;\&\; y=b \;\&\; x+y=c]^T \mid x, y \in M\} \leq [a+b=c]^T$. Однако имеет место $[a+b=c]^T = [Ra+b=Rc]^T$ и $1= +^T(<Ra, Rb, Ra+b>) \leq [<Ra, Rb, Ra+b>\in+^T]$. Поэтому $[a+b=c]^T \leq u$. Пусть $\varphi = \psi \;\&\; \upsilon$. Тогда $[(\varphi)_{M}T]^T = [(\psi)_{M}T]^T \wedge [(\upsilon)_{M}T]^T = [\psi]^T \wedge [\upsilon]^T =[\psi \;\&\; y]^T$. Аналогично для остальных связок. Пусть $\varphi = \exists x\psi$. Тогда $[(\varphi)_{M}T]^T =$

$\bigvee\{M^T(Rx) \wedge [(\varphi(x,\overline{\alpha}))_{M^T}]^T \mid Rx \in D(M^T)\}$. Но $M^T(Rx)=1$. Поэтому $[(\varphi)_{M^T}]^T = [\exists x\psi]^T$.

Для квантора $\forall$ аналогично.

2.4. *Переход от выводимости в* ZF *к выводимости в* ZFI

Пусть $RING^l(M)$, $UCNR^{B,l}(M)$ и IDUCNR (M) - формулы в языке ZF, такие, что $RING^l(M)=(M$ - l-кольцо), $UCNR^{B,l}(M)=(M$ - B-l-кольцо с обычным условием нормальности, содержащее 1). $IDUCNR^{B,l}(M)=(M$ - неразложимое B-l-кольцо с обычным условием нормальности, содержащее 1).

Теорема 1. Пусть $T_\varphi(\overline{x})$ - *произвольное множество фиформул в языке l-колец со свободными переменными* ($\overline{x}$), а $\psi(\overline{x})$ - *любая* AE - *формула в этом же языке.*

Тогда, если $ZF \vdash \forall M(RING^l(M) \Rightarrow (\forall(\overline{x})(T_\varphi(\overline{x}) \Rightarrow \psi(\overline{x})))$, *то*

1) $ZFI \vdash \forall M(UCNR^{B,l}(M) \Rightarrow (\forall x(T'_\varphi(\overline{x}) \Rightarrow \psi(\overline{x})))_M$ и.

2) $ZFI \vdash \forall M(IDUCNR^{B,l}(M) \Rightarrow (\forall \overline{x}(T_\varphi(\overline{x}) \Rightarrow \psi(\overline{x})))_M$.

Доказательство. 1) Пусть M -любое, удовлетворяющее условию теоремы и $ZF \vdash (T_\varphi(\overline{\alpha}) \Rightarrow \psi(\overline{\alpha}))$, где $\overline{\alpha}$ -произвольные параметры из M и $T_\varphi(\overline{\alpha}) \Rightarrow (\overline{\alpha})$ - релятивизация формулы $T_\varphi(\overline{x}) \Rightarrow \psi(\overline{x})$ к M. Тогда $ZFI \vdash ([T_\varphi(Ra) \Rightarrow \psi(Ra)]^B=1)$, где $(T_\varphi(Ra) \Rightarrow \psi(Ra))$ - релятивизация формулы $T_\varphi(\overline{x}) \Rightarrow \psi(\overline{x})$ к M^T, и соответствующая оценка вычисляется в V^B. Тогда, вследствие предложения 7, $ZFI \vdash ([T_\varphi(\overline{\alpha})]^B \leq [\psi(\overline{\alpha})]^B)$. Отсюда (с учетом предложения 3(1)) $ZFI \vdash ([T_\varphi(\overline{\alpha})]^T \leq [T_\varphi(\overline{\alpha})]^B)$. Следовательно, $ZFI \vdash ([T_\varphi(\overline{\alpha})]^T \leq [\psi(\overline{\alpha})])$. Но $\psi(\overline{x})$ - AE-формула, поэтому (в силу предложения 3(2)) $ZFI \vdash ([T_\varphi(\overline{x})]^T \leq [\psi(\overline{x})]^T)$, или $ZFI \vdash ([T_\varphi(\overline{x}) \Rightarrow \psi(\overline{x})]^T=1)$. Тогда, принимая во внимание предложение 5, получаем: $ZFI \vdash (T'_\varphi(\overline{\alpha}) \Rightarrow \psi(\overline{\alpha}))$, где $T'_\varphi(\overline{\alpha}) \Rightarrow \psi'(\overline{\alpha})$ - есть релятивизация формулы $(T'_\varphi(\overline{x}) \Rightarrow \psi'(\overline{x}))$ к M.

(2) следует из (1) и предложения 6.

Формулу ж(.), описывающую l-кольцо M = <M, +, ., -, ≤, 0, 1> в языке ZF, назовем абсолютной, если

$$\mathrm{ZFI} \vdash \forall M((\mathrm{M})\ 6\ @\mathrm{k}(\mathrm{M}\ /\mathrm{R}\ )@ = 1)$$

l-кольцо M назовем ж-абсолютным, если оно описывается в языке ZF абсолютной формулой ж.

Если M - ж-, то формулы RING^l (M), $\mathrm{UCNR}^{B,l}$ (M) и $\mathrm{IDUCNR}^{B,l}$ (M) в языке ZF обозначаем соответственно ARING^l (M), $\mathrm{AUCNR}^{\mathrm{B}}_{l}$ (M) и $\mathrm{AIDUCNR}_{ж}{}^{B,l}$ (M).

Теорема 2. Пусть T_φ и ψ - любые, удовлетворяющие условию теоремы 1. Пусть ж(.) - формула в языке ZF.

Тогда, если $\mathrm{ZF} \vdash \forall M(\mathrm{ARING}^l\ (M) \Rightarrow (\forall \bar{\mathrm{x}}\, (\mathrm{T}_\varphi(\bar{\mathrm{x}}) \Rightarrow \psi(\bar{\mathrm{x}})))_M$, *то*

1) $\mathrm{ZFI} \vdash \forall M(\mathrm{AUCNR}^{B,l}\ (M) \Rightarrow (\forall \mathrm{x}(\mathrm{T}'(\bar{\mathrm{x}}) \Rightarrow \psi(\bar{\mathrm{x}})))_M$ *и*

2) $\mathrm{ZFI} \vdash \forall M(\mathrm{AIDUCNR}^{B,l}\ (M) \Rightarrow (\forall \bar{\mathrm{x}}\, (\mathrm{T}_\varphi\, (\bar{\mathrm{x}}) \Rightarrow \psi(\bar{\mathrm{x}})))_M$.

Доказательство. Пусть выполнены условия теоремы.

Определим в V^Ω объект g, такой, что $D(g)=\{<\breve{\alpha}\,,\ \mathrm{Ra}>|a\in M\}$ и $g(<\breve{\alpha}\,,\ \mathrm{Ra}>)=1$. Тогда $\mathrm{ZFI} \vdash [\mathrm{M}^\vee\ /\mathrm{R}_0 \cong M^T]=1$, и следовательно, $\mathrm{ZFI}\vdash$ [ж(M^T)]=1. Отсюда (с учетом теоремы 1) получим требуемое.

3. Перевод классической теории в интуиционистскую для алгебраических систем с R-нормой

3.1. *Алгебраические системы языка первого порядка*

Пусть фиксирован произвольный язык L первого порядка, включающий наряду с символом равенства "=" функциональные F_0, ..., F_m; предикатные P_0, ..., P_n; константные c_0, ..., c_k символы.

В работе подразумеваемой интерпретацией указанного языка является произвольная алгебраическая система M = <M, F_0 ..., F_m, P_0, ..., P_n, c_0, ..., c_k>, понимаемая как теоретико-множественная переменная. Запись $(\varphi)_M$ означает интерпретацию формулы φ языка L в M. Конечно, $(\varphi)_M$ - формула в языке ZF.

Кольцо M=<M, +, ., -, #, 0, 1> называют отделенным полем (или #-полем), если оно является моделью для выразимых в языке колец с отделенностью (языке #-колец) следующих аксиом:

A: 1) $\forall a \forall b(\neg((a\#b)) \Rightarrow (a=b))$; 2) $\forall a \forall b(a=b \Rightarrow \neg(a\#b))$;

3) $\forall a \forall b \forall c((a\#b) \Rightarrow (a\#c) \vee (b\#c))$; 4) $\forall a \forall b(a\#b \Rightarrow b\#a)$.

$F1^{\#}$: $\forall a \forall b \forall c((a\#b) \Rightarrow ((a+c)\#(b+c))$;

$F2^{\#}$: 1) $(0\#1)$; 2) $\forall a((a\#0) \Rightarrow \exists b((b\#0) \ \& \ (a \bullet b=1))$;

3) $\forall \alpha \forall b \forall c((a\#b) \ \& \ (c\#0) \Rightarrow ((aVc)\#(bVc))$.

Добавляя при фиксированном простом p, аксиому $((p \bullet 1)\#0)$, получим отделенное поле характеристики 0.

Бинарное отношение #, обладающее свойствами A, называют отношением отделенности.

Расширим язык #-колец до языка дифференциальных #-колец, добавив бинарный функциональный символ Δ.

Алгебраическую систему $\langle M, +, ., -, \Delta, \#, 0, 1 \rangle$ назовем дифференциальным #-полем, если M является одновременно моделью для аксиом отделенного поля и аксиом D следующего вида:

1) $\forall a \forall b(\Delta(a+b)=\Delta(a)+\Delta(b)$; 2) $\forall a \forall b(\Delta(a \bullet b)=\Delta(a) \bullet b+a \bullet \Delta(b))$.

Пусть n- произвольное фиксированное положительное целое число. Под дифференциальным многочленом f от n дифференциальных переменных в языке дифференциальных колец будем понимать следующий индексироованный (конечный) набор переменных

$$\left\{ \int_{(x^{(0)})} i_{10} \ {}_{(x^{(\lambda_1)})} i_{1\lambda} \ {}_{(x^{(0)})} i_{n0} \ {}_{(x^{(\lambda_n)})} i_{n\lambda_n} \right\}$$

(который для краткости будем записывать как $\{ \int_{i_{10} \ i_{n\lambda_n}} \}$), где числа $i_{10}, \ldots, i_{n\lambda_n}, \lambda_1, \ldots, \lambda_n$ принимают значения 0,1,2, ... и $x_j^{(k)}$ интерпретируется как k-ая производная от $x_j^{(0)} = x_j$, при этом $k \geq 1$, $j = 1, \ldots, n$.

Под степенью дифференциального многочлена f будем понимать неотрицательное целое число l, такое, что

$$l = \max\left\{ i \middle| \exists i_{10} \ldots \exists i_{n\lambda_n} \left(\& \int_{i_{10} \ i_{n\lambda_n}} \#\mathbf{0} \right) \right\}.$$

Под порядком O_{x_j} переменной x_j дифференциального многочлена f будем понимать порядок старшей производной от этой переменной. Порядок O_f дифференциального многочлена f определим таким образом: $O_f = \max\left\{O_{x_1},\ldots,O_{x_n}\right\}$.

Дифференциальный многочлен f представляет собою индексированный (конечный) набор переменных. Для произвольного набора фиксируем некоторое упорядочение. Тогда f может рассматриваться как набор тех же переменных того же языка, но расположенных в фиксированном порядке.

Пусть f_0, ..., f_{R-1} - переменные, определяющие дифференциальный многочлен f степени l от n дифференциальных переменных, порядки которых есть соответсвенно числа $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$.

Положим

$$Z^{\Delta}_{n,l,\lambda}(\int, a, y) =$$

$$\left\{y = \int_0 + \int_1 \bullet\left(a_1^{(0)}\right)^{i_{110}},\ldots\left(a_1^{(\lambda_1)}\right)^{i_{11\lambda_1}},\ldots,\left(a_n^{(0)}\right)^{i_{1n0}},\ldots,\right.$$

$$\ldots,\left(a_n^{(\lambda_n)}\right)^{i_{1n\lambda_n}} + \ldots + \int_{R-1} \bullet\left(a_1^{(0)}\right)^{i_{R-110}},\ldots$$

$$\left.\ldots,\left(a_1^{(\lambda\ )}\right)^{i_{R-11\lambda_1}},\ldots,\left(a_n^{(0)}\right)^{i_{R-1n0}},\ldots,\bullet\left(a_n^{(\lambda_n)}\right)^{i_{R-1n\lambda_n}}\right\},$$

где

$$R = \sum_{i=0}^{l}((n_1 + i - 1)!/\,i!(n_1 - 1)!), n_1 = \lambda_1 + \ldots + \lambda_n, \quad i_{1,1,0},\ldots,$$

$$i_{R-1,n,\lambda_n} = 0,1,2,\ldots \quad i_{1,1,0} + \ldots + i_{1,n,\lambda_n} \le l,\ldots, i_{R-1,1,0} + \ldots + i_{R-1,n,\lambda_n} \le l.$$

Рассмотрим индексированный набор переменных вида

$$\left\{\left\{\int^{[10]},\int^{[20]}\right\}_{\left(x^{(\lambda)}\right)^0},\ldots,\left\{\int^{[1(d-1)])},\int^{[2(d-1}\right\}_{\left(x^{(\lambda)}\right)^{d-1}},1_{\left(x^{(\lambda)}\right)^d}\right\},$$

где $\lambda \ge 0$, $d > 0$, а f , f ,..., f , f -дифференциальные многочлены от дифференциальной переменной x, причем $f^{[20]}$ #0 , ..., $f^{[29d-10]}$ #0. Если порядок каждого из дифференциальных многочленов $f^{[10]}$, $f^{[20]}$, ..., $f^{[1(d-1)]}$, $f^{[2(d-1)]}$ меньше λ, то набор такого вида будем называть многочленом. Блюм степени d , порядка λ и обозначать $f^{(\mathfrak{R})}$.

Пусть f - многочлен Блюм степени d и порядка λ. Обозначим через $Z_{d,\lambda,}(f^{\mathfrak{R}}, a, y)$ формулу языка дифференциальных колец следующего вида:

$$\exists y_0 \dots \exists y_{d-1}\, \exists z_0 \dots \exists z_{d-1} \exists w_0 \dots \exists w_{d-1}\; Z^{\Delta}_{1,l_{10},(\lambda-1)}\left(\int^{[10]}, a, y_0\right) \&$$

$$Z^{\Delta}_{1,l_{20},(\lambda-1)}\left(\int^{[20]}, a, z_0\right) \& \dots \& Z^{\Delta}_{1,l_{1(d-1)},(\lambda-1)}\left(\int^{[1(d-1)]}, a, y_{d-1}\right) \&$$

$$Z^{\Delta}_{1,l_{2(d-1)},(\lambda-1)}\left(\int^{2(d-1)]}, a, z_{d-1}\right) \& \; y_0 = z_0 \bullet w_0 \bullet \& \dots$$

$$\dots \& y_{d-1} = z_{d-1} \bullet w_{d-1} \& u = a^{(\lambda)} \& y = w_0 + \dots + w_{d-1} \bullet u^{d-1} + 1 \bullet u^d.$$

Мы используем запись $\overline{\forall} f$ или $\overline{\exists} f$ как сокращение для последовательности кванторов ∀ или ∃ по всем свободным переменным, определяющим многочлен f.

Дифференциальное #-поле $M = \langle M, +, ., -, \Delta, \#, 0, 1\rangle$ характеристики 0 назовем дифференцально замкнутым #-полем характеристики 0, если в M выполняются следующие схемы аксиом $DC^{\#}$:

$$(\mathbf{1}_{(d,\lambda),(p,\mu)})\overline{\forall} \int^{\mathfrak{R}} \overline{\forall} g^{\mathfrak{R}} \exists a_1 \dots \exists a_n \exists y \left(Z_{d,\lambda}(\int^{\mathfrak{R}}, a, \mathbf{0}\right) \&$$

$$\& Z_{p,\mu}\left(g^{(\mathfrak{R})}, a, y\right) \& \; y \# 0\Big),\text{ где } d,\ p>0,\ \lambda,\ \mu \geq 0 \text{ и } \lambda > \mu;$$

$$(2_d)\ \overline{\forall} \int^{\mathfrak{R}} \exists a_1 \dots \exists a_n (Z_{d,0}(\int^{(\mathfrak{R})}, a, \mathbf{0})),\text{ где } d > 0.$$

Первая аксиома, по существу, утверждает, что для произвольных многочленов Блюм f степени d, порядка λ и $g^{\mathfrak{R}}$ степени p, порядка μ, если λ>m, то найдется a, которое является корнем f и в то же время не является корнем $g^{\mathfrak{R}}$. Вторая же аксиома говорит, что всякий многочлен Блюм степени d и нулевого порядка имеет корень.

3.2. *Алгебраические системы в* V^{Ω}

Фиксируем произвольную cHa Ω. Для нее определяем соответствующую cBa B. Тогда определяются соответственно V^{Ω} и V^{B}, а для них - соответствующие оценки.

Пусть M^{Ω}, $F_0^{\Omega},\dots,F_m^{\Omega},\dots,P_0^{\Omega},\dots,P_n^{\Omega}$, $c_0^{\Omega},\dots,c_k^{\Omega}$ - любые фиксированные элементы из V^{Ω}. Набор

$$< M^{\Omega}, F_0^{\Omega},\dots,F_m^{\Omega},\dots,P_0^{\Omega},\dots,P_n^{\Omega}, c_0^{\Omega},\dots,c_k^{\Omega} >$$

назовем алгебраической системой языка $L=\{F_0,\dots,F_m, P_0,\dots, P_n, c_0,\dots, c_k\}$ из универсума V^{Ω} с достоверностью u, если

$$\Big[\Big[F_0^{\Omega}:\left(M^{\Omega}\right)^{i_0}\to M^{\Omega}\,\&\dots\&\,F_m^{\Omega}:\left(M^{\Omega}\right)^{i_m}\to M^{\Omega}\,\&\,P_0^{\Omega}\subseteq\left(M^{\Omega}\right)^{j_0}\,\&\dots$$

$$\dots\&\,P_n^{\Omega}\subseteq\left(M^{\Omega}\right)^{j_n}\,\&\,c_0^{\Omega}\in M^{\Omega}\,\&\dots\&\,c_k^{\Omega}\in M^{\Omega}\Big]^{\Omega}=u \quad u\geq 0.$$

(В дальнейшем надстрочные символы у M^{Ω}, $F_0^{\Omega},\dots,F_m^{\Omega},\dots,P_0^{\Omega},\dots,P_n^{\Omega}$, $c_0^{\Omega},\dots,c_k^{\Omega}$ будем опускать.)

Аналогично определяется в универсуме V^{Ω} понятие алгебраической системы многосортного языка. Например, для случая языка #-нормированных колец мы получаем следующее. Пусть M, P, $+$, $+$, ., $.^{P}$, -, $-^{P}$, $\#^{P}$, $<^{P}$, 0, 0^{P}, 1, 1^{P}, $|.|$ - любые фиксированные элементы из V^{Ω}. Набор <M, P, $+$, $+$, ., $.^{P}$, -, $-^{P}$, $\#^{P}$, $<^{P}$, 0, 0^{P}, 1, 1^{P}, $|.|$> назовем алгебраической системой языка #-нормированных колец из универсума V^{Ω} с достоверностью u, если

$[+: M^2 \to M \,\&\, . : M^2\to M \,\&\, . : M\to M \,\&\, +^{P} : P^2\to P \,\&\, .^{P} : P^2\to P \,\&\, -^{P} : P\to P \,\&\, <^{P} \subseteq P^2 \,\&\, \#^{P}\subseteq P^2 \,\&\, 0 \in M \,\&\, 1\in M \,\&\, 0^{P}\in M \,\&\, 1\in M \,\&\, |.| : M\to P]^{\Omega}=u$ и $u \geq 0$.

Алгебраическую систему M=<M, +, ., -, #, Δ, 0, 1> языка дифференциальных #-колец из универсума V^{Ω} с достоверностью u назовем полуабсолютной, если выполняются следующие условия:

1) $[+:M^2\to M]^{\Omega} \leq [+:M^2\to M]^{B}$, $[.:M^2\to M] \leq [.:M^2\to M]^{B}$, $[-:M\to M]^{\Omega} \leq [-:M\to M]^{B}$, $[\Delta:M\to M]^{\Omega} \leq [\Delta:M\to M]^{B}$;

2) $\forall\alpha, b\in D(M)(u \wedge M(a) \wedge M(b) \leq ([<a,b> \in \#]^{\Omega} \Leftrightarrow [\neg(a=b)]^{B}))$.

Лемма 1. *Пусть t - терм языка дифференциальных колец со сводными переменными* $a_1, \ldots, a_n$ и c, d - *переменные этого языка. Пусть* M=M, +, ., -. Δ, #, 0, 1> - *алгебраическая из универсума* V^Ω *с достоверностью* u.

Тогда, если M - полуабсолютная, то для любых $a_1, \ldots, a_n$ *и c, d из D(M) выполняется*

1) $[u \wedge M(a_1) \wedge \ldots \wedge M(a_n) \wedge M(c) \wedge [(t(a_1, \ldots, a_n = c)_M]^\Omega \leq$ $[(t(a_1, \ldots, a_n = c)_M]^B]$

2) $[u \wedge M(a_1) \wedge \ldots \wedge M(a_n) \wedge M(c) \wedge M(d) \wedge [(t(a_1, \ldots, a_n = c)_M]^\Omega \leq$ $[(t(a_1, \ldots, a_n = d)_M]^B \to [c=d]^B$;

3) $[u \wedge M(a_1) \wedge \ldots \wedge M(a_n) \wedge M(c) \leq$ $[(t(a_1, \ldots, a_n)\#c)_M]^\Omega \Leftrightarrow [(t(a_1, \ldots, a_n)\#c)_M]^B$.

Доказательство. (1) *и* (2) *докажем индукцией по длине терма t. Если в качестве t выступает константный символ или свободная переменная, то соотношения очевидны.*

1) *Пусть t - двуместный функциональный символ* +. Пусть a_1, a_2, c, d - произвольные элементы из D(M) и $u \wedge M(a_1) \wedge M(a_2) \wedge M(c) \wedge M(d)=w$. Тогда с учетом определения интерпретации формулы языка колец в языке ZF и свойств вложения $I^* : V^\Omega \to V^B$ имеем: $w \wedge [(a_1 + a_2 = c)_M]^\Omega \leq \bigvee^B_{y \in V^B} [y=\langle a, b, c\rangle \wedge y \in +]^B$. Но $u \leq [+:M^2 \to M]^B$, поэтому правая часть полученного неравенства представляет собою вычисленную в V^B оценку формулы $(a_1 + a_2 = c)_M$. Случаи, когда в качестве t выступают символы ., -, Δ доказываются аналогично. Затем применяем индуктивный шаг по длине терма t.

2) Пусть t - двуместный функциональный символ +. Пусть a_1, a_2, c, d - произвольные элементы из D(M). Тогда с учетом (1) имеем: $u \wedge M(a_1) \wedge M(a_1) \wedge M(c) \wedge M(d) \wedge [(a_1 + a_2 = c)_M]\Omega \wedge$

$[(a_1 + a_2 = d)_M]^B \leq [\langle a_1, a_2, c\rangle \in +]^B \wedge [\langle a_1, a_2, d\rangle \in +]^B \wedge [+:M^2 \to M]^B \leq [c=d]^B$. Отсюда получаем требуемое. Аналогично для остальных функциональных символов. Затем - индуктивный шаг по длине t.

3) Пусть $a_1, \ldots, a_n$, c - произвольные элементы из D(M), пусть $u \wedge M(a_1) \wedge \ldots \wedge M(a_1) \wedge M(c)=w$ и $\overline{a} = \langle a_1, \ldots, a_n\rangle \in D(M)$.

С учетом (1) имеем: $w \wedge [(t(\bar{a})\#c)_M]^{\Omega} \leq [(t(\bar{a})\#c)_M]^B$. Полученное неравенство обозначим (*).

Применив индукцию по длине терма t, получим: $w \leq [(t(\bar{a})=y_1)_M]^B$. Тогда, принимая во внимание (2), имеем: $w \wedge [(t(a)\#c)_M]^{\Omega} \leq w \wedge \bigvee^B_{y_1 \in D(M)} M(y_1) \wedge [t(\bar{a})=y_1)_M]^{\Omega} \wedge [(y_1 \#c)_M]^B$.

Отсюда, используя условие полуабсолютности системы M, а также то, что отображение $I^* : V^{\Omega} \to V^B$ сохраняет sup элементов из V^{Ω}, получим: $w \wedge [(t(\bar{a})\#c)_M]^B \leq \bigvee^B_{y_1 \in D(M)} M(y_1) \wedge [(t(\bar{a})=y_1)_M]^{\Omega} \wedge [(y_1 \#c)_M]^B$. Но правая часть этого неравенства представляет собою вычисленную в V^{Ω} оценку формулы $(t(\bar{a})\#c)_M$. Отсюда с учетом неравенства (*) получаем требуемое соотношение.

Естественную запись в языке ZF того, что M - полуабсолютная алгебраическая система из универсума V^{Ω} с достоверностью u будем обозначать через HAbs(M, u). Через $DCF^{\#}_0$ (M) будем обозначать формулу в языке ZF, описывающую M как дифференциально замкнутое #-поле M характеристики 0.

Предложение 8. $ZFI \vdash \forall\Omega\forall u{\in}\Omega\forall M, +, \cdot, -, \Delta, \#, 0, 1{\in}V^{\Omega}$ $(HAbs(M, u) \Rightarrow ([DCF^{\#}_0 (M)]^{\Omega} \leq [DCF^{\#}_0 (M)]^B$.

Доказательство. Пусть [M - алгебраическая система]^B =v. Сразу же заметим, что $u \leq v$. Это непосредственно следует из условия полуабсолютности системы M и неравенства $[f \subseteq g]^{\Omega} \leq [f \subseteq g]^B$, справедливого для любых f, g из V^{Ω}.

Пусть S - список аксиом, описывающих M как дифференциальное замкнутое #-поле характеристики 0. Мы должны показать, что каждая аксиома а из этого списка, интерпретируемая в языке ZF формулой с параметрами из V^{Ω}, удовлетворяет неравенству $u \wedge [(A)_M]^{\Omega} \leq [(A)_M]^B$. Каждое из требуемых неравенств будет получено в результате применения свойств cHa-морфизма I: $\Omega \to B$ и индуцируемого им отображения $I^*: V^{\Omega} \to V^B$, а также леммы 1.

3.3. *Свойства полуабсолютных алгебраических систем с R-нормой*

Пусть (M, P) - алгебраическая система двусортного языка. M назовем областью первого сорта, P - областью второго сорта. Пусть φ - формула в языке #-нормированных колец. Индукцией по строению φ определим интерпретацию указанной формулы в ZF. Полученную интерпретацию обозначим через $(\varphi)_{M,\,P}$.

Одна из возможных реализаций предиката # связана с заданием нормы со значением в поле P, в котором отношение отделенности уже задано. В качестве такого поля P возьмем поле дедекиндовых действительных чисел R. Отношение отделенности в R задаем следующим образом: $x\#y \Leftrightarrow x<y \vee y<x$. Тогда поле M можно превратить в отделенное поле, положив: $a\#b = |a-b| \#^R 0^R$, где $|.|$ - отображение вида: $M \to R$, удовлетворяющее условиям:

1) $\forall a(M(a) \to \neg(|a| <^R \ 0^R)) \wedge |0|=0^R$;
2) $\forall a\forall b(M(a) \wedge M(b) \to |a| \bullet^R |b|=|a\bullet b|)$;
3) $\forall a\forall b(M(a) \wedge M(b) \to |a|+^R |b| <^R |a+b|)$

(такое отображение $|.|$ будем называть R-нормой или нормой).

Через DCF_0 (M, R) обозначим формулу в языке ZF, описывающую M как дифференциально замкнутое поле M характеристики 0 с R-нормой.

Пусть η - формула в языке ZF, описывающая множество дедекиндовых действительных чисел R и его порядково-кольцевую структуру. Тогда через R обозначим тот об`ект из универсума V^Ω, для которого $[R^\Omega =\{x|\eta^* (x)\}]^\Omega =1$. Свойства R^Ω подробно описаны в [5,10].

Пусть M - алгебраическая система соответствующего языка колец. Тогда алгебраическую систему (M,R^2) языка #-нормированных колец из универсума V^Ω с достоверностью u назовем полуабсолютной, если M - полуабсолютная алгебраическая система и R^2 - норма удовлетворяет условию: $[|.|:M \to R^\Omega]^B \leq [|.|:M \to R^2]^B$.

Естественную запись в языке ZF того, что (M, R) - полуабсолютная алгебраическая система из универсума V^Ω с достоверностью u будем обозначать через $HAbs(M,u,R^\Omega)$.

Пусть a служит сокращением для последовательности $a_1, \dots, a_n$, а $M(\bar{a})$ - сокращением для $M(a_1) \wedge \dots \wedge M(a_n)$.

Лемма 2. *Пусть* $|.|$ *- функциональный символ языка* # *- нормированных колец*, t *- терм сорта* 1. *Пусть* (M, R) *- алгебраическая система* V^Ω *с достоверностью* u. *Тогда имеет место:*

1) $\forall a \in D(M)\ \forall c' \in D(R)\ (HAbs(M, u, R) \Rightarrow (u \wedge M(\bar{a}) \wedge R(c') \wedge [(|t(\bar{a})| = c')_{M,R}]^\Omega \le [(|t(a)| = c')_{M,R}]^B));$

2) $\forall a \in D(M)\ \forall c' \in D(R)\ HAbs(M, u, R) \Rightarrow (u \wedge M(\bar{a}) \wedge R(c') \le (\|t(\bar{a})\| \#^R c')_{M,R}]^\Omega \overset{B}{\longleftrightarrow} [(\|t(\bar{a})\| \#^R c')]^B));$

3) $\forall a \in D(M)\ \forall c' \in D(R)\ HAbs(M, u, R) \Rightarrow (u \wedge M(\bar{a}) \wedge R(c') \le ([(\|t(\bar{a})\| <^R c')_{M,R}]^\Omega \overset{B}{\longleftrightarrow} [(\|t(\bar{a})\| <^R c')_{M,R}]^B));$

(Надстрочный индекс Ω у M и R опускаем, так же будем поступать с надстрочным индексом R при записи операций и отношений, заданных на R.)

(1)-(3) непосредственно следуют из леммы 1.

Пусть Q - множество положительных рациональных чисел, а $|.|$ - отображение вида $R \to R$, такое, что $|a| = \max\{a, -a\}$.

Лемма 3. $\| \ \|$ - *функциональный символ языка* #*- нормированных колец*, t *- терм сорта* 1. Пусть (M,R) - *алгебраическая система из* V^Ω *с достоверностью* u. *Тогда имеет место*:

$$\forall \bar{a} \in D(M) \forall c' \in D(R) \forall \varepsilon \in D(\check{Q}_0)\ (HAbs(M, u, R) \Rightarrow (u \wedge M(\bar{a}) \wedge R(c') \le ([(t(\bar{a}) = c')_M]^\Omega \overset{B}{\longrightarrow} [(\|t(\bar{a}) - c'\| < \varepsilon)_{M,R}]^B))).$$

Доказательство. Заметим, что $ZF \vdash (\forall x,y \in R[x = y \leftrightarrow \forall \varepsilon \in Q_0\ ((|x - | < \varepsilon)_{M,R})])$. Но, если $ZF \vdash \phi$, то $ZFI \vdash \forall B([\phi]^B = 1)$.

Поэтому, принимая во внимание леммы 1 и 2, свойства отображений I и I* , а также свойства R^Ω , получим требуемое.

В дальнейшем формулу $|\ \|t_1 - t_2\|\ | < \varepsilon$ будем называть ε-равенством и обозначать через $t_1 \overset{\varepsilon}{=} t_2$, где ε - свободная переменная (при интерпретации языка нормированных колец в языке ZF пробегающая множество положительных рациональных чисел Q_0).

3.4. *Интуиционистский вариант теоремы Ритта о нулях*

Пусть n -любое фиксированное целое положительное число, а s -любое фиксированное целое число ≥ 1.

Пусть f, $f^{[1]}$, ..., $f^{[s]}$ - дифференциальные многочлены от n дифференциальных переменных степеней соответственно l, ν_1, ..., ν_s, а δ_1, ..., δ_n, $\lambda_{1,1}$, ..., $\lambda_{1,n}$, ..., $\lambda_{s,1}$, ..., $\lambda_{s,n}$ - соответственно порядки дифференциальных переменных многочленов f, $f^{[1]}$, ..., $f^{[s]}$.

Обозначим через $A^{\Delta}_{l,\bar{\nu},\bar{\sigma},\bar{\lambda}_1,\ldots,\bar{\lambda}_b}$ f, $f^{[1]}$, ..., $f^{[s]}$ формулу в языке нормированных дифференциальных колец следующего вида

$$\forall a_1 \ldots \forall a_n \left(\left\| \sum_{i=1}^{\Gamma-1} \int_i \bullet (a_1^{(0)})^{i_{10}}, \ldots, (a_1^{(\sigma_1)})^{i_{1\sigma_1}}, \ldots, (a_n^{(0)})^{i_{n0}}, \ldots \right.\right.$$

$$\left. \ldots (a_n^{(\sigma_n)})^{i_{1\sigma_n}} \right\| \# 0 \Rightarrow$$

$$\left\| \sum_{j=0}^{\Gamma_1-1} \int_j^{[1]} \bullet (a_1^{(0)})^{j_{10}}, \ldots, (a_1^{(\lambda(1,1))})^{j_{1\lambda(1,1)}}, \ldots, (a_n^{(0)})^{j_{n0}}, \ldots \right.$$

$$\left. \ldots, (a_n^{(\lambda(1,n))})^{j_{n\lambda(1,n)}} \right\| \# 0 \vee \ldots \vee$$

$$\left\| \sum_{k-0}^{\Gamma_s-1} \int_k^{[s]} \bullet (a_1^{(0)})^{k_{1-0}}, \ldots, (a_l^{(\lambda(s,l))})^{k_{1\lambda(s,1)}}, \ldots, (a_n^{(0)})^{k_{n0}}, \ldots \right.$$

$$\left.\left. \ldots, (a_n^{(\lambda(s,n))})^{k_{n\lambda(s,n)}} \right\| \# 0 \right).$$

Здесь и далее запись $\bar{\nu}$ используется как сокращение для последовательности ν_1, ..., ν_s; $\bar{\delta}$ - сокращение для δ_1, ..., δ_n; $\bar{\lambda}_1$ - сокращение для λ_1, ..., $\lambda_{1,n}$ и т.д.

Понятно, что A^{Δ} (...) рассматривается как формула, свободными переменными которой являются переменые языка колец, определяющие дифференциальные многочлены f, $f^{[1]}$, ..., f и взятые в фиксированном порядке.

Пусть $g^{[10]}, \ldots, g^{[1k]}, \ldots, g^{[s0]}, \ldots, g^{[sk]}$ - дифференциальные многочлены от n дифференциальных переменных степеней соответственно $\tau_{10}, \ldots, \tau_{1k}, \ldots, \tau_{s0}, \ldots, \tau_{sk}$, а $\mu_{10,1}, \ldots, \mu_{10,n}, \ldots, \mu_{1k,1}, \ldots, \mu_{1k,n}, \ldots, \mu_{s0,1}, \ldots, \mu_{s0,n}, \ldots, \mu_{sk,1}, \ldots, \mu_{sk,n}$ - соответственно порядки дифференциальных переменных этих многочленов. (В дальнейшем первую последовательность будем обозначать через $\overline{\tau}$, вторую - через $\overline{\mu}$.)

Пусть $F^{\Delta}(\ldots)$ - формула в языке дифференциальных колец, описывающая соотношение вида: $f^{p} = \sum_{i=1}^{s}\sum_{j=0}^{k} g^{[ij]}(\int^{[i]})^{(j)}$.

Понятно, что $F^{\Delta}(\ldots)$ содержит =, функциональные символы +, ., Δ и логические связки &. При этом она представляет собою Е-формулу, свободными переменными которой являются взятые в фиксированном порядке переменные языка дифференциальных колец, определяющие многочлены $f, \ldots, g^{[sk]}$.

Определим в языке нормированных дифференциальных колец формулу $\varepsilon F^{\Delta}(\ldots)$. Для этого все атомарные формулы вида $t_1 = t_2$, входящие в $F^{\Delta}(\ldots)$, заменим формулами вида $t_1 \overset{\varepsilon}{=} t_2$. Такое определение позволяет рассматривать $\varepsilon F^{\Delta}(\ldots)$ как формализацию соотношения вида: $f^{p} \overset{\varepsilon}{=} \sum_{i=1}^{s}\sum_{j=0}^{k} g^{[ij]}(\int^{[i]})^{(j)}$.

Обозначим через $\varepsilon\phi^{\#}$ формулу следующего вида :

$$\overline{\forall}\int\overline{\forall}\int^{[1]}\ldots\forall\int^{[s]}\Big(A^{\Delta}_{\tilde{\imath},\tilde{\delta}}(\int,\int^{[1]},\ldots,\int^{[s]})\Rightarrow\overline{\forall}\varepsilon\Big[Q(\varepsilon)\Rightarrow\overline{\exists}g^{[10]}\ldots\overline{\exists}g^{[s\tilde{k}]}$$

$$\Big(\Big(\varepsilon F^{\Delta}_{\tilde{\imath},\tilde{\delta},\tilde{p},\tilde{k},\tilde{\tau}}(\int,\int^{[1]},\ldots,\int^{[s]},\ldots,g^{[s\tilde{k}]})\Big)\Big]\Big).$$

Тогда $\forall M, +, ., -, \Delta, 0, 1\ DCF_0\ ((M,R)) \Rightarrow (\varepsilon\phi^{\#})$ является формализацией в языке ZF следующего утверждения:

если n, $\tilde{\imath}, \tilde{\delta}, \tilde{p}$ - любые целые положительные числа; (M,R) - любое нормированное дифференциально замкнутое поле характеристики 0; f, $f^{[1]}, \ldots, f^{[s]}$ - произвольные дифференциальные многочлены над M от n дифференциальных переменных порядка $\leq \widetilde{\delta}$ и степени $\widetilde{i}$, такие, что f обращается в нуль во всех общих нулях $f^{[1]}, \ldots, f^{[s]}$, то для любых положительных рациональных чисел $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{\mathfrak{R}}$ существует целое положительное число $\rho \leq \widetilde{\rho}$, существуют дифференциальные многочлены $g^{[10]}, \ldots, g^{[ek]}$ над M от n дифференциальных переменных с границами $\widetilde{k}$ и $\widetilde{\tau}$ для порядков и степеней, существуют производные порядков $\leq \widetilde{k}$ дифференциальных многочленов $f^{[1]}, \ldots, f^{[s]}$ такие, что

$$f^{\rho} = \sum_{i=1}^{s} \sum_{j=0}^{k} g^{[ij]} (f^{[i]})^{(j)}$$

Теорема 3. (Интуиционистский вариант теоремы Ритта о нулях системы дифференциальных многочленов.)

ZFI $\vdash \forall \Omega \quad \forall u \in \Omega \; \forall M, +, -, ., \Delta, 0, 1, \|\,.\,\| \in V^{\Omega}$ HAbs(M, u, R) $\Rightarrow$

$$([DCF_0((M,R)) \Rightarrow (\varepsilon\phi^{\#})_{M,R}]^{\Omega} = 1))$$

(*причем границы* $\widetilde{\rho}, \widetilde{k}$ *и* $\widetilde{\tau}$ *не зависят от выбора дифференциально замкнутого поля* M *характеристики* 0).

Доказательство. Пусть Ω - произвольная фиксированная cHa и u - любой ее элемент. Пусть M, +, -, ., Δ, 0, 1, $\|\,.\,\| \in V^{\Omega}$, а $f_0, \ldots, f_{\Gamma-1}, \ldots, f_0^{[1]}, \ldots, f_{\Gamma_1-1}^{[1]}, \ldots, f_0^{[s]}, \ldots, f_{\Gamma_s-1}^{[s]}$ (переменные, определяющие соответственно дифференциальные многочлены $f^{[1]}, \ldots, f^{[e]}$) принадлежат D(M).

Пусть $[DCF_0((M,R))]^{\Omega} = u'$. Выражение $M(f)$ используем как сокращение для $M(f_0) \wedge \ldots \wedge M(f_{\Gamma-1})$ (аналогичное сокращение будем использовать и для других многочленов).

Поле M можно превратить в #-поле, положив $a\#b = \|a-b\| \# 0$. Тогда, используя лемму 2, предложение 8, а также свойства отображений I и I*, получим неравенство

$$u' \wedge M(f) \wedge M(a_1) \wedge \ldots \wedge M(a_n) \wedge M(f^{[1]}) \wedge \ldots \wedge M(f^{[e]}) \wedge$$

$$[[(A^{\wedge}_{i,\widetilde{\delta}}(f, f^{[1]}, \ldots, f^{[s]}))_{M,R}]^{\Omega} \leq$$

$[DCF_0((M,R))]^B \wedge M(f) \wedge M(a_1) \wedge \ldots \wedge M(a_n) \wedge M(f^{[1]}) \wedge \ldots \wedge M(f^{[s]}) \wedge [[(A^{\Delta}_{\tilde{1},\tilde{\delta}}(f, f^{[1]}, \ldots, f^{[s]}))_{M,R}]^B$

левую и правую части которго обозначим соответственно v и v'.

Обозначим через ψ формулу в языке дифференциальных колец, получаемую из формулы $\varepsilon\psi$ следующим образом. Все подформулы вида $\|t(\ldots)\|\#0$, входящие в A^{Δ} (...), заменим на $t(\ldots) \neq 0$; кванторную приставку $\forall\varepsilon$ и Q_0 (ε) опустим, а εF^{Δ} (...) заменим на F^{Δ} (...). Тогда $(\forall M, +, ., -, \Delta, 0, 1\ (DCF_0(M) \Rightarrow (\psi)_M$ есть формализация в языке ZF классической теоремы Ритта о нулях. А так как V^B - модель классической теории множеств (и следовательно, вычисленная в V^B оценка любой формулы, выводимой в ZF равна 1), то $[DCF_0((M,R)) \Rightarrow (\psi)_{M,R}]^B = 1$. Отсюда $v' \leq$

$$\bigvee^B_{g^{-[10]}\in D(M)} \ldots, \bigvee^B_{g^{-[10]}\in D(M)} M(g^{[10]})\wedge\ldots\wedge M(g^{[sk]}) \wedge [(F^{\Delta}(\ldots))_{M,R}]^B$$

F^{Δ} есть E-формула, содержащая конечное число формул вида $t_1 = t_2$, кон`юнктивно между собой связанных. Но отображение I^* сохраняет sup произвольного и inf конечного числа элементов из V^{Ω}. Поэтому, воспользовавшись леммой 3, получим: $v \leq$

$$\bigvee^{\Omega}_{g^{-[10]}\in D(M)} \ldots, \bigvee^{\Omega}_{g^{-[10]}\in D(M)} M(g^{[10]})\wedge\ldots\wedge M(g^{[k]}) \wedge [(F^{\Delta}(\ldots))_{M,R}]^{\Omega}$$

Тогда, замкнув кванторами всеобщности сначала переменные $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n$, а затем все свободные переменные, определяющие многочлены f, $f^{[10]}$, ..., $f^{[e]}$, получим $[DCF_0((M,R)) \Rightarrow (\varepsilon\psi^{\#})_{M,R}]^{\Omega} = 1$.

Аналогично были получены интуиционистские свойства полей разложения, интуиционистские варианты Nullstellensatz, положительного решения 17-ой проблемы Гильберта и др.

Автор благодарит В.А. Любецкого за постоянную поддержку и внимание к своей работе.

Литература

1. *Биркгоф Г.* Теория решеток.- М.: Наука, 1984.
2. *Grayson R.J.* Heyting-valued Models for intuitionistic set theory, - Berlin; Heidelberg; New York: Springer, 1979. - p.402-414. - (Lecture Notes in Mathematics, v. 753).
3. *Копытов В.М.* Решеточно упорядоченные группы. - М.: Наука, 1984.
4. *Любецкий В.А.* Оценки и пучки. - Препринт ИППИ АН СССР, М., 1988.
5. *Любецкий В.А.* Оценки и пучки О некоторых вопросах нестандартного анализа. - Успехи математических наук, т. 44, вып. 4(268), 1989, с.99-153.
6. *Ritt J.* Differential algebra.- New York: Dover,1966.
7. *Робинсон А&* Введение в теорию моделей и метаматематику алгебры.- М.: Наука, 1967.
8. *Сакс Г.* Теория насыщенных моделей.-М.: Мир,1976.
9. *Takeuti G., Titani S.* Heyting-valued universes of intuitionistic set theory.-Berlin: Springer, 1981.-p.189-306. - (Lecture Notes in Mathematics, v. 891).
10. *Titani S., Takeuti G.* Conservative extension of elementary notions in Heyting-valued universe,1. - Memoris of College of Engineering, Chubu Univ., 1988, N24, p.123-134.

И.А.Герасимова

Логический статус отрицания в деонтических ситуациях

1. Проблема статуса разрешений

Проблема статуса разрешений традиционно обсуждается в философии норм и философии права [4, с.50-54], [10]. В стандартной формулировке она звучит следующим образом: "является ли разрешение независимой категорией или его можно определить в терминах обязательности"? Если рассматривать разрешение независимой категорией, то возникает обычно следующий вопрос: "является ли разрешение чем-то "сверх и более", чем отсутствием запрета?" [1,с.299]. Как отмечает фон Вригт, в "философии права вопрос о статусе разрешений относится к проблеме "брешей" ("пробелов") в законе. Если то, что не запрещено, разрешается ipso facto, то всякое действие или состояние имеет юридический статус: оно или запрещено (и "противоположное" ему обязательно), или же оно разрешено. Правовой порядок в этом смысле по необходимости является *замкнутым*. В нем нет "пробелов" [1, с.300]. Другие философы права считают, что поскольку имеется много вещей ненормативного статуса, из того, что они не запрещены не следует, что они разрешены.

Заметим, что постановку вопроса в форме "все, что не разрешено запрещено" можно рассматривать как отдельную проблему статуса запрещений. Впервые на этот факт обратил внимание фон Вригт: "если разрешение может быть определено в терминах запрещения (обязательности), то и обратное тоже верно. Упомянутый выше вопрос, следовательно можно задать так: является ли запрещение чем-то "сверх и более", чем отсутствием разрешения?" [1, с.299].

Рассмотрим сложившуюся ситуацию, поменяв угол зрения. Можно интерпретировать "обязательно", "запрещено" и "разрешено" как самостоятельные нормы, между которыми возможны определенные соотношения, но не обязательно, чтобы одна норма определялась в терминах другой. Будем считать "обязательно" и "запрещено" *сильными нормами*, поскольку они вынуждают совершать *необходимые* действия или предписывают *строго* воздерживаться от действий. А "разрешено" - *слабой нормой,* так как разрешение предполагает *возможность* действия. Тезис о том, что "все, что не запрещено разрешено" в данной ситуации можно принять, но следует понимать не в смысле равносильности не-запрещения и разрешения, а как указание на тот факт, что из более сильной нормы вытекает более слабая норма. Но по закону контрапозиции классической логики высказываний из принятого положения следует: "все, что не разрешено, запрещено". Последнее же вызывает сомнения: из слабого не-разрешения вытекает сильный запрет. На данную ситуацию впервые обратил внимание В.А.Смирнов весной 1985 года. Это было время начала перестройки в нашем отечестве и оживленных дискуссий по политическим и правовым вопросам. Проблемная ситуация, обнаруженная Владимиром Александровичем, послужила поводом для написания первой моей работы по деонтической логике [2]. Я бы назвала возникшее затруднение *проблемой статуса "не-разрешений"* : "если "не-разрешение" не есть "запрещение", то что же?" На данный вопрос можно предложить ответ, предварительно рассмотрев вопросы об индивидуальном нормотворчестве и о статусе отрицаний в деонтических ситуациях.

2. Индивидуальное нормотворчество

В философии права различают нормы, имеющие *общий* и *индивидуальный* характер (общий, частный и единичный - в логической терминологии). Нормы права, зафиксированные в кодексе или в официально подписанном нормативном документе, являются общими нормами , регулирующими типичные отношения и действия. Например, статьи КЗоТ формулируют общие нормы права. Решение суда, вынесенное на основании КЗоТ, расценивается как предписание индивидуального характера. С точки зрения логики, индивидуальные предписания можно рассматривать как вывод частного из общих положений. Если принять во внимание аспект эпистемической логики, то в данном случае общее представляет собой явное знание, а частное заключение - вид неявного знания, неявного относительно данного кодекса. Ивлевым Ю.В. общие нормы названы *базисными*, а частные - *производными* [5]. Следуя терминологии фон Вригта, общее относится к *нормам-формулировкам*, предписывающим определенные способы классификации ситуаций, а индивидуальное характеризуется *нормами-высказываниями*, утверждающими существование определенных ситуаций. Юрист, рассматривающий конкретный случай исполнения закона, в своем рассуждении будет использовать и нормы-формулировки и нормы-высказывания. Рассмотрим утверждение: "На основании Статьи 25 "Кодекса о браке и семье РСФСР", согласно которой "супруги обязаны материально поддерживать друг друга", гр.Петров обязан материально поддерживать свою нетрудоспособную супругу гр.Петрову" [7, с.12]. Положение о том, что "супруги обязаны материально поддерживать друг друга" является нормой-формулировкой, а утверждение "гр.Петров обязан материально поддерживать свою нетрудоспособную супругу гр.Петрову" является нормой-высказыванием, которое констатирует конкретную обязанность.

Юридические нормы в большей или меньшей степени реализуются в фактическом поведении. Бывает так, что "правовое предписание, содержащееся в тексте законодательного акта или в другом источнике права, не стало общепринятой нормой фактического поведения" [6, с.95]. Например, "предписание, согласно которому водитель обязан уступать дорогу пешеходу, переходящему улицу в специально обозначенном месте, еще не стало фактической нормой поведения всех водителей" [6, с.96]. Юридические нормы, следовательно, нужно отличать от норм фактических. Не всякая юридическая норма является фактической, и наоборот, не всякая фактическая норма имеет юридический статус, В последнем случае имеется в виду действие правил поведения, еще не зафиксированных в законодательных актах.

Не только общие нормы права призваны регулировать отношения субъектов права. Философы права выделяют особые *нормы-принципы.* К числу последних, например, принадлежит принцип добросовестного выполнения обязательств в международном праве [3,с.52]. Нормы-принципы могут составлять понятийную систему, либо действовать в качестве общих предпосылок. К примеру, в международном праве, различают понятия "международного договора, имеющие законодательную силу, "доктрины" международного права и "природы" международного права, формирующих нормы различной степени общности" [3,с.7].

Заметим, что понятие нормотворчества не тождественно понятию правотворчества. Правотворчеством или принятием новых законов и норм права занимаются уполномоченные органы и лица, а нормотворчество осуществляется на нижних этажах правовой иерархии исполнителями законодательной воли высших инстанций.

Рассуждения, связанные с индивидуальным нормотворчеством, формирующие частные и единичные нормы, с точки зрения логики представляют собой сложное образование, включающее различные по семантическому статусу выражения: события, условия, действия, высказывания о событиях, высказывания о действиях, нормы-формулировки, нормы-высказывания, эпистемические (а возможно, и другие) оценки. К числу наиболее распространенных принадлежит эпистемическая оценка отсутствия информации ("неизвестно") о каком-либо обстоятельстве.

Если рассматривать проблемы статуса разрешений и статуса не-разрешений в призме индивидуального нормотворчества, то они примут более прозрачный вид. Во-первых, "незапрещено" как отсутствие нормы в кодексе не указывает на общую норму, явно установленную, а разрешено и "не-разрешено" могут оказаться таковыми, "Не-разрешено" можно понимать не как отсутствие предписания, а как явное требование воздержаться от действия. В этих условиях вопрос о соотношении запрещения и разрешения выходит за пределы законов классической логики.

3. Абсолютные нормы и отрицание

Рассмотрим как обстоит дело с взаимосвязями между абсолютными или безусловными нормами. Для этого введем некоторые обозначения. Пусть p,q,r - акциональные переменные, $\&,\vee,\neg,\rightarrow,\leftrightarrow$ - логические связки (конъюнкция, дизъюнкция, отрицание, импликация, эквивалентность). Акциональные переменные пробегают по выражениям для родовых действий. Обозначим через P, O и F деонтические операторы разрешено, обязательно и запрещено, соответственно. Pp можно прочесть как "позволительно p" или "позволительно (разрешено) сделать такое действие как p " или "разрешено делать p". Имеются определенные трудности в переводе выражений для действий в естественном языке в формальный язык, уточняющий логическую форму. Будем полагать, что выражение "делать p" равносильно выражению "делать такое действие как p". Op можно прочесть "необходимо делать p" или " обязательно p". Fp читается "запрещено p " или "запрещено делать p ".

Идеи взаимоопределимости одних норм через другие и идеи наличия параллелизма между деонтическими и алетическими модальностями, по-видимому, впервые были высказаны Лейбницем в наброске "Элементов естественного права" ("Definitio justitiae universalis", 1671) [9, с.333]. Определяя понятия "доброго человека как любящего всех", Лейбниц вводит следующие соотношения:

Справедливое, дозволенное	есть то,	возможно	для
Несправедливое, недозволенное	что	невозможно	доброго
Беспристрастное, должное		необходимо	человека
Безразличное		случайно	

Алетические модальности, согласно Лейбницу, можно выразить в терминах возможности, отрицания и существования:

Возможное		может	
Невозможное	есть то,	не может	быть
Необходимое	что	не может не	
Случайное		может не	

Как отмечали некоторые исследователи, в частности, Кутюра, этим делениям соответствуют суждения классической логики а, i, е, о [9, с.333]. Рассматриваемые Лейбницем деонтические модальности в современной терминологии можно интерпретировать следующим образом: дозволенное как разрешенное, недозволенное как запрещенное, должное как обязательное. В таком случае, символически, взаимоопределимость одних норм через другие можно выразить следующим образом:

(1) $Pp \leftrightarrow \neg O \neg p$; (2) $\neg P \neg p \leftrightarrow Op$;
(3) $Op \leftrightarrow F \neg p$; (4) $Fp \leftrightarrow O \neg p$.

Определения (1)-(4) соответствуют стандартному подходу к модальностям.

В соответствии с предложенной нами классификацией мы разделили нормы на сильные и слабые. К сильным принадлежат обязывающие и запрещающие нормы, а разрешающие являются слабыми, Кроме того, обязывающие и разрешающие нормы являются *положительными* нормами, предписывающими совершать определенные действия, а запрещающие - *негативными* нормами, предписывающими воздерживаться от поступков. В философии права структурно условные положительные нормы подразделяются на *гипотезу* или условие действия нормы и *диспозицию* - часть, выражающую суть веления. Считается, что негативные нормы обеспечивают действия положительных норм и устанавливают меры ответственности. Отсюда негативные нормы состоят из *диспозиции* и *санкции* - части, в которой определяется мера ответственности за нарушение нормы. Негативные нормы называют *правоохранительными* нормами. Особым подклассом разрешающих норм являются *управомочивающие* нормы. Они определяют правомочия граждан и других субъектов права. В управомочивающих нормах используется особый вид *возможности действовать*, который *гарантирован законом*.

В ряде случаев разрешение не квалифицируют как норму. Например, если понимать под нормой результат взаимосогласованного волеизъявления сторон в международном праве, то норма является юридически обязательным для исполнения положением, сопряженным с ответственностью за неисполнение. Иные виды положений, не выражающие общую взаимообусловленную волю, не рассматриваются как нормы. Такой характер имеют резолюции-рекомендации, представляющие простую сумму воль участников договора и указывающие на возможное поведение. В рассматриваемом нами классе ситуаций разрешение будет рассматриваться как слабая норма.

Рассмотрим, что произойдет с деонтическими выражениями, если использовать комбинации модальных операторов и отрицания. Начнем с внутренних отрицаний, относящихся к пропозиции. $P\neg p$ можно прочесть как "позволительно не p" или "позволительно не делать p". Последнее можно интерпретировать как возможность не совершать действие p. Например, данная ситуация возникает в предписаниях для благочестивых христиан: "в дни поста позволительно не воздерживаться от пищи больным, путешествующим и детям". Последнее равнозначно положительной норме для указанных категорий лиц: "разрешено вкушать пищу".

Обязывающие и запрещающие нормы с внутренним отрицанием (или отрицанием внутри действия деонтического оператора) могут переходить друг в друга. $O\neg p$ можно прочесть "необходимо (обязательно) не p " или "необходимо не делать p". $F\neg p$ читается :"запрещено не p". $O\neg p$ можно понимать как необходимость воздерживаться от действия, и тогда $O\neg p$ равносильно Fp. Например, "обязательно не курить" равнозначно "запрещено курить". Аналогично, $F\neg p$ равносильно Op.

Использование внутреннего акционального отрицания не меняет статуса явных норм. $O\neg$p, $P\neg p$ и $F\neg p$ могут быть явно указаны в кодексе. Сложности возникают при рассмотрении ситуаций с внешним отрицанием. Будем отличать простое воздержание от действия ("не курить" от нормативного воздержания ("не-разрешено курить"). Для внешнего отрицания введем символ "not". Неразрешающие нормы также могут иметь статус явных норм. *NotPp* читается "не разрешается p ". Неразрешающие нормы, относятся к охранительным нормам, но имеют более слабые санкции, чем при запрете. Таковой нормой, например, является следующее правило христианской морали "не должно домогаться первенства". Оно означает, что нужно подавлять всякое стремление к первенству пред другими. Отметим, что в данном случае понятие "слабой нормы" относительно. Нарушение данного положения грозит осуждением для мирян, но возможно суровое наказание для монаха обители. Возможно явное неразрешение вида $notP\neg p$ ("Не должно не помочь нуждающемуся человеку"). Иногда незапрещения явно вносят в кодекс, но явных необязательств избегают. В выражении "не обязательно p " выражение p может не оказаться нормой вообще. Среди правоведов имеется дискуссия о возможности "мягкого права". Противники "мягкого права" выступают против необязательности в праве, когда обязательное можно делать, а можно и не делать. Например, должностное лицо-деятель нормотворчества обязан совершить нормативное действие - явно дать разрешение или явно не разрешить.

Внешнее отрицание во многих случаях используется для указания *отсутствия* нормы в кодексе. Для описания таких ситуаций будем использовать особый модальный оператор "~". Различие между нормативным отрицанием "not" и модальным отрицанием "~" мы вынуждены сделать, поскольку при принятой стратегии анализа "неразрешение" может быть задано явным образом. В случаях явного неразрешения будем употреблять знак "not". В ситуациях отсутствия разрешения - знак "~". $\sim Pp$ понимается как "отсутствует разрешение делать p". Возможное прочтение $\sim Op$ - "отсутствует обязательство сделать p". Модальный оператор "~" можно применять и к пропозициональным формулам. Пусть s есть пропозиция. Если "$\neg s$" интерпретируется как явно указанное "неверно, что s", то $\sim s$ понимается как отсутствие истинностного значения s . Отрицание "~" в пропозициональном случае рассматривается как эпистемическое отрицание "неизвестно, имеет ли место случай такой, что s ".

В отношении деонтических формул оператор отсутствия "~" также можно трактовать с точки зрения знания. $\sim Pp$ можно прочесть как "неизвестно, является ли действие p разрешенным или нет". Данное прочтение уместно, если явное разрешение отсутствует в предписаниях высшей законодательной инстанции. В особых случаях "~" используют для выражения незнания норм, которые явно даны в кодексе, но данное лицо их не знает. Подобные случаи мы рассматривать не будем. Будем считать, что оператор "not" перед деонтическим оператором указывает на *нормативное* отрицание, а " ~" - на нормативное отсутствие (*эпистемическое нормативное* отрицание). "$\neg$" перед пропозициональной формулой является показателем *фактического (онтологического)* отрицания, "~" - перед пропозициональной формулой есть *эпистемическое* отрицание.

Заметим, что комбинированные и итерированные модальности не будут рассматриваться нами как правильно построенные формулы. Таковыми не являются выражения $\sim P\sim p$, OPp, $O(p\supset Op)$. Правильно построены: $\sim F\neg p$, $\sim Pq\&\sim s$, $Op\supset Pp$.

Рассмотрим вопрос о соотношении между O, P и F при различных видах отрицаний. В соответствии с разрабатываемой нами стратегией, нормы понимаются как самостоятельные предикаты. Если явно формулируется кодекс норм, то разумно не допускать пересечения областей разрешенного и обязательного. То, что обязательно, должно быть с необходимостью совершено, а то, что разрешено, гарантирует (или рекомендует) возможное поведение. Если смешать эти понятия, то может возникнуть путаница в регуляции нормативных отношений и определении меры ответственности. Вместе с тем классическое взаимоопределение операторов имеет место при условии, если не проводится различие между явными и неявными нормами. Указанные соотношения также могут иметь место при заключениях от явных (общих) норм к неявным (единичным) нормам в процессе индивидуального нормообразования. Например, если явно в кодексе указано, что "обязательно p ", то неявно это означает, что запрещено противоположное p состояние дел. Если запрещение p явно, то низшая законодательная инстанция может сделать вывод, что обязательно нужно воздержаться от p.

Явные нормы мы будем указывать с помощью нижнего индекса е. Например. $O_e p$ означает, что действие p явно обязательно, о чем указано в кодексе. В неявных нормах индекс отсутствует. Будем различать отрицание в явных и неявных нормах. В неявных нормах отрицание понимается как негативный предикат. Для выражения явной негативной модальности будем использовать выражения $notP_e$ (явно не-разрешено), $notF_e$ (явно не-запрещено), $notO_e$ (явно не- обязательно). $NotP_e p$ является деонтической формулой, $\neg P_e p$ - пропозициональная формула, $\neg notP_e p$ - также пропозициональная формула.

Следующие соотношения вряд ли вызовут сомнения:
(5) $O_e p \leftrightarrow F\neg p;$ (6) $F_e p \leftrightarrow O\neg p;$ (7) $F_e\neg p \leftrightarrow Op;$
(8) $O_e\neg p \leftrightarrow Fp.$

Представляют интерес негативные нормы. Рассмотрим случаи с нормативным отрицанием. Возможны следующие соотношения:

(9) $notO_e p \rightarrow notF\neg p,$ (10) $notF_e p \rightarrow notO\neg p;$

(11) $(notO_e\neg p \rightarrow notF\neg p) \vee (notO_e\neg p \rightarrow notFp);$

(12) $(notF_e\neg p \rightarrow notO\neg p) \vee (notF_e\neg p \rightarrow notOp).$

Различные соотношения между необязательностью и незапрещенностью возникают, если принять во внимание обстоятельства, сопутствующие предпочтению действия p или воздержанию от действия p. Если выбор безразличен по отношению к p или $\neg p$, то мы имеем дело с альтернативными утверждениями для $notP_e\neg p$ и $notO\neg p$. В утверждении $notF_e\neg p \rightarrow notOp$ $\neg p$ предпочитается p.

Из вышеизложенного можно заметить, что O_e и P_e между собой не взаимоопределимы. Как мы уже отмечали, модальности $notO_e$ и $notF_e$ почти не употребляются на практике. Более употребительны неявные нормы $notO$ и $notF$, а также нормы с оператором отсутствия. Можно предложить варианты соотношения между модальностями:

(13) $(\sim Op \rightarrow Pp) \vee (\sim Op \rightarrow P\neg p);$

(14) $(notOp \rightarrow Pp) \vee (notOp \rightarrow P\neg p).$

Если явно отсутствует обязательство, то можно либо разрешить нечто сделать, либо разрешить не делать. В (14) речь идет о неявных частных нормах. Заметим, что неявно обязательность на практике чаще имеет смысл неявного позволения воздержаться от действия:

(15) $notOp \rightarrow P \neg p$.

(15) более употребительно, чем (14). В (15) ситуация с $\neg p$ предпочтительней p. Заметим, что (16) неверно:

(16) $\sim O_e p \not\rightarrow \sim P_e p$.

Отсутствие явной обязательности не влечет отсутствия явного разрешения. Следующие утверждения уточняют смысл высказывания "все, что не запрещено - разрешено":

(17) $\sim F_e p \rightarrow Pp$.

Если нечто неразрешено явно, то и неразрешено неявно, но не запрещено, поскольку неразрешение более слабая норма, чем запрет:

(18) $notP_e p \rightarrow notPp$.

Т.о. решение проблемы статуса неразрешений сводится к смыслу формулировки (18). Для удовлетворительного рассмотрения случая с отсутствием явного разрешения понадобится дополнительная информация.

4. Относительные нормы и отрицание

Как правило при формулировке кодекса норм указывают границы действия норм, которые определяются наличием или отсутствием тех или иных обстоятельств. Значимость различных обстоятельств или условий при формулировке норм неодинакова. В зависимости от статуса условий относительные нормы можно подразделить на два типа.

Рассмотрим ситуацию, в которой норма должна выполняться в большинстве случаев, если имеется соответствующая возможность, и не выполняется в некоторых случаях. Например, в соответствии со статьей 15 Кодекса о браке и семье [7] запрещено вступать в брак лицам, не достигнувшим восемнадцатилетия. Однако в отдельных исключительных случаях может быть снижен брачный возраст. Логическую форму данной нормы можно выразить следующим образом с помощью связки "разве, что":

"запрещено p, разве что s",

где p - акциональное выражение, описывающее общую норму, а s - обстоятельство (пропозиция), делающее возможным исключение из нормы, а именно разрешение *p*. *s* - исключительная ситуация из некоторого общего набора ситуаций, которую можно рассматривать как *необходимое условие для не выполнения* нормы "запрещено *p*". Оборот "разве, что" соединяет две области, которые имеют различный статус: общие нормы и конкретные условия. Отсюда, оборот "разве, что" будет нами пониматься как строгая дизъюнкция интенсионального типа и обозначаться через знак "\". Знак "\" иначе будем называть оператором "оговорки".

$Fp\backslash s$ читается: "запрещается совершать такое действие как *p*, разве что имеет место случай *s*". $Pp\backslash\neg s$ читается: "разрешается совершать такое действие как *p*, разве что не имеет место случай *s*". В последнем примере отсутствие *s* создает такую ситуацию, при которой разрешение совершить действие *p*, невозможно. Без *s* - ситуация реализации действия *p* - невозможна. Из вышесказанного следует, что условия в нормах с оговорками являются *необходимыми* для реализации (нереализации) нормативной ситуации.

Обстоятельство s может играть роль ведущего (существенного) признака, обуславливающего наличие иных признаков для выполнения нормы. В таком случае условие можно рассматривать как *достаточное* для формирования нормы поведения. Для выражения достаточных условий будем использовать оператор "/", который понимается как интенсиональная условная связка "если, то".

Pp/s читается: "если имеет место случай s, то разрешено совершить действие *p*" или "разрешено *p* при условии *s*". Например, "если есть свободное время, то можно пойти в кино". $Pp/\neg s$ читается: "разрешается делать *p*, если не имеет место случай *s*". ("Если отсутствует высокая температура, то можно пойти погулять").

В дальнейшем нормы с условным оператором "/" будем именовать условными нормами, а нормы с дизъюнктивным оператором "\" называть нормами с оговорками. Заметим, что при переходе в противоположную норму меняется и статус условий: необходимое становится достаточным, и наоборот. Например, следующая формулировка представляется правильной:

(19) $Op\backslash s \rightarrow Fp/s$.

Читается: "Если должно быть совершено p, разве что имеет место s, то, если имеет место случай s, то запрещается совершать p. В обратную сторону импликация (19) неверна:

(20) $\neg(Fp/s \rightarrow Op\backslash s)$.

Согласно Авиценне, "запрещено часто купаться в бане, если у человека плохое зрение" (Fp/s). Из этого положения не следует, что "обязательно часто купать в бане, разве что имеется плохое зрение ($Op\backslash s$). Тем не менее может быть верным следующее положение "разрешено часто купаться в бане, разве что у человека - плохое зрение".

(21) $Fp/s \rightarrow notPp\backslash s$.

В соответствии с общим правилом, определяющим взаимоотношение между O и F, можно предложить следующую формулировку для условных норм:

(22) $Fp/\neg s \leftrightarrow O\neg p/\neg s$.

"Запрещается купаться в глубоком бассейне, если не умеешь хорошо плавать" эквивалентно "обязательно нужно воздерживаться от купания в глубоком бассейне, если не умеешь хорошо плавать").

(23) $Fp/\neg s \leftrightarrow Pp/s$

по-видимому предпочтительней

(24) $Fp/\neg s \leftrightarrow Op/s$, а

(25) $Op/s \leftrightarrow notPp/\neg s$

предпочтительней более строгой формулировке

(26) $Op/s \leftrightarrow Fp/\neg s$.

При принятии вышеуказанных принципов можно руководствоваться следующими соображениями. *В ситуациях норм с оговорками осуществляется переход от сильных норм к сильным, но меняется статус условия*, например (19), а также

(27) $Fp\backslash s \rightarrow Op/s$,

(28) $Fp\backslash\neg s \rightarrow Op/\neg s$.

В ситуациях с условными нормами переход от сильных норм к более слабым более предпочтителен: (21), (23), (25).

5. Эпистемическое отрицание в процессе индивидуализации норм

Для дальнейшего обсуждения нам потребуется различить внешнее пропозициональное отрицание от внутреннего отрицания. Будем считать, что "$\rceil$ " есть знак внешнего отрицания "неверно, что".

Рассмотрим ситуации перехода от общих норм к частным. Можно выделить различные классы ситуаций индивидуализации общих норм в зависимости от характера условий. По-видимому, впервые Лейбниц ввел ранжирование условий, используя вероятностные оценки [9, с.417]. Согласно Лейбницу, переход от отсутствия права к условному (с относительными нормами) и затем к чистому праву (с абсолютными нормами) зависит от типа условий, ранжирование которых можно провести от 0 до 1. Невозможное условие (0) обуславливает отсутствие права, случайное условие (1/2) обуславливает чистое право.

В нашем подходе мы проведем ранжирование условий по *фактору известности об их наличии.* Если известно наличие условия, то предполагается, что имеет место соответствующая пропозиция. Если известно, что условие отсутствует, то не имеет место соответствующая пропозиция. В случае отсутствия информации о наличии условия делается эпистемическое утверждение с оператором "неизвестно".

Предположим, что в кодексе имеются относительные нормы - условные и с оговорками. Рассмотрим ситуации, когда пропозиции, выражающие условия получают одну из трех оценок ("имеет место", "не имеет место", "неизвестно"). Возможны следующие соотношения:

(29) $(P_eA\backslash B \,\&\, \rceil B) \to PA$;
(30) $(P_eA\backslash B \,\&\, B) \to notPA$;
(31) $(P_eA\backslash B \,\&\, {\sim}B\,) \to P\neg A$;
(32) $(O_eA\backslash B \,\&\, \rceil B \to OA$;
(33) $(O_eA\backslash B \,\&\, B) \to FA$;
(34) $(O_eA\backslash B \,\&\, {\sim}B) \to FA;$
(35) $(F_eA\backslash B \,\&\, B\,) \to PA$;
(36) $(F_eA\backslash B \,\&\, \rceil B\,) \to FA$;
(37) $(F_eA\backslash B \,\&\, {\sim}B) \to FA$;
(38) $(P_eA/B \,\&\, B) \to PA;$
(39) $(P_eA/B \,\&\, \rceil B) \to P\neg A$;
(40) $(P_eA/B \,\&\, {\sim}B) \to P\neg A$;
(41) $(\mathrm{F}_eA/B \,\&\, B) \to FA);$
(42) $(F_eA/B \,\&\, \rceil B\,) \to PA);$
(43) $(F_eA/B \,\&\, {\sim}B) \to P\neg A;$
(44) $(O_eA/B \,\&\, B) \to OA;$
(45) $(O_eA/B \,\&\, \rceil B) \to notOA$;
(46) $(O_eA/B \,\&\, {\sim}B) \to P\neg A$.

Литература

1. *Фон Вригт Г.Х.* Нормы, истина и логика // Логико-философские исследования. Избранные труды. М.1986.
2. *Герасимова И.А.* Нормы с оговорками и рассуждения при недостатке информации // Исследования по неклассическим логикам. М. 1989.
3. *Захарова Н.В.* Выполнение обязательств, вытекающих из международного договора. М.1987.
4. *Ивин А.А.* Логика норм. М. Изд-во МГУ. 1973.
5. *Ивлев Ю.В.* Логика норм. Автореферат диссертации на соискание учебной степени кандидата философских наук. М. 1972.
6. *Кудрявцев В.Н.* Закон, поступок, ответственность. М. 1986.
7. Кодекс о браке и семье РСФСР. М.1986.
8. Норма права // Юридический энциклопедический словарь. М. 1984.
9. *Ягодинский И.И.* Философия Лейбница. Процесс образования системы. Первый период 1659-1672. Казань.
10. *Åqvist L.* Deontic logic// Handbook of Philosophical Logic. Vol.II, 605-714. Dordrecht.1984.

Ю.В.Ивлев

К теории логических модальностей*

Задачей работы является объяснение смысла понятий логической необходимости, случайности, возможности и построение логики, описывающей связи по логическим формам между высказываниями с этими терминами. Высказывание является логически необходимым, если оно истинно в силу логической формы. Если высказывание ложно в силу логической формы, то оно является логически невозможным. Высказывание логически случайно, когда при одних нелогических терминах оно ложно, а при других истинно. Применяя модальные операторы “логически необходимо” (□), “логически возможно” (◊) и “логически случайно” (∇) к высказыванию, мы утверждаем, что высказывание, соответственно, логически истинно, логически непротиворечиво и логически недетерминировано, то есть высказывания с указанными терминами должны оцениваться не как истинные или ложные, а как логически истинные (*T*), логически ложные (*F*) и логически недетерминированные (I). Пусть дана формула $\Box(p\supset q)\supset(\Box p\supset\Box q)$. Положим, что переменные p и q имеют, соответственно, значения *T* и *I*, то есть первая из них интерпретируется в качестве логически истинного высказывания, а вторая - в качестве логически недетерминированного. Всего возможных описаний состояний для указанной формулы четыре: $\alpha 1 = (p\&q)$; $\alpha 2 = (p\&\neg q)$; $\alpha 3 = (\neg p\&q)$; $\alpha 4 = (\neg p\&\neg q)$. Поскольку элементарные высказывания интерпретируются указанным выше образом, то есть p не может быть ложным в силу логической формы, а q может быть как истинным так и ложным, из множества возможных описаний состояний исключаются $\alpha 3$ и $\alpha 4$. Полученное множество описаний состояний - $\{\alpha 1, \alpha 2\}$ называется ограниченным множеством описаний состояний. Множество возможных описаний состояний для формулы обозначим буквой *W*, а ограниченное множество описаний (ОМОС) - *W'*. Если два или более элементарных высказываний интерпретируются в качестве логически недетерминированных, то конъюнкция этих высказываний

* Работа поддержана РГНФ, грант № 05-06-17584.

(некоторые из этих высказываний могут быть взяты с отрицаниями), в свою очередь интерпретируется в качестве логически возможного высказывания или в качестве логически ложного высказывания. То есть для ОМОСов могут образовываться подмножества, называемые подОМОСами (подомосами). Подомос обозначается буквой *W''*. В результате указанной интерпретации элементарных высказываний образуются все возможные подмножества исходного множества описаний состояний *W*. Формулам приписываются значения в описаниях состояний, входящих в подомосы. Элементарное высказывание является истинным в описании состояния, если и только если оно входит в это описание состояния не со знаком отрицания. Формула A&B является истинной в описании состояния, если и только если в этом описании состояния истинны формулы A и B, и т. д. для других немодальных логических терминов. Формула $\Box$A является истинной в описании состояния подомоса, если и только если формула A является истинной в каждом описании состояния этого подомоса. Формула $\Diamond$A является истинной в описании состояния подомоса, если и только если формула A является истинной в некотором описании состоянии этого подомоса. Формула является логически выполнимой, если и только если она истинна в некотором описании состояния некоторого подомоса. Формула является общезначимой, если и только если она истинна в каждом описании состояния каждого подомоса.

Общезначимыми являются те и только те формулы, которые доказуемы в исчислении S5 Льюиса.

Теперь ясен смысл модельных структур реляционной семантики для этого исчисления. Модельная структура - это одна из интерпретаций пропозициональных перемененных, входящих в формулу (в формулы), посредством указанных выше значений, а также интерпретация конъюнкции пропозициональных переменных (перед некоторыми из пропозициональных переменных может стоять знак отрицания), проинтерпретированных в качестве логически недетерминированных высказываний, в качестве логически возможного или логически невозможного высказывания. Факт интерпретации пропозициональной переменной а в качестве логически истинного высказывания будем обозначать формулой $\neg\Diamond\neg$ а, в качестве логически ложного - $\neg\Diamond$ а, логически недетерминированного - $\Diamond$ а $\wedge$ $\Diamond\neg$ а ($\Diamond$а,$\Diamond\neg$а). Если элементарные высказывания a_1, ..., a_n

интерпретируются в качестве логически недетерминированных, то факт интерпретации конъюнкции $\underline{a}_1\wedge\ldots\wedge\underline{a}_n$, где $\underline{a}_i$ есть a_i или $\neg a_i$, в качестве логически невозможного высказывания обозначается формулой $\neg\Diamond(\underline{a}_1\wedge\ldots\wedge a_n)$, а в качестве логически возможного - формулой $\Diamond(\underline{a}_1\wedge\ldots\wedge\underline{a}_n)$. *ОГ′* - множество таких формул.

Для доказательства метатеоремы о семантической полноте исчисления формулируется следующая лемма.

<u>Лемма</u>. Пусть D - формула, $<ОГ', W'>$ - подомос, $a_1,\ldots,a_n$ - все различные переменные, входящие в D, $b_1^\alpha,\ldots,b_n^\alpha$ - истинностные значения этих переменных в описании состояния α таком, что $\alpha\in W'$, A_i^α есть a_i, если b_i^α есть t, и есть $\neg a_i$, если b_i^α есть f. Пусть D^α есть D или $\neg D$ в зависимости от того, принимает ли D значение t или f в α. Тогда

$ОГ' \cup \{A_1^\alpha,\ldots,A_n^\alpha\} \vdash D^\alpha$.

Лемма доказана возвратной индукцией по числу вхождений логических терминов в формулу D.

Не имея возможности изложить доказательство метатеоремы о семантической полноте из-за ограниченного объема статьи, приведем пример устранения гипотез в том случае, когда формула D содержит одну пропозициональную переменную -p.

Возможные *ОГ′* - $\{\neg\Diamond\neg p\}$, $\{\neg\Diamond p\}$, $\{\Diamond p,\Diamond\neg p\}$. Возможные омосы - $<\{\neg\Diamond\neg p\}, \{\{p\}\}>$, $<\{\neg\Diamond p\},\{\{\neg p\}\}>$, $<\{\Diamond p,\Diamond\neg p\},\{\{p\}\{\neg p\}\}>$.

1. $\neg\Diamond\neg p, p \vdash D$;
2. $\neg\Diamond p,\neg p \vdash D$;
3. $\Diamond p, \Diamond\neg p, p \vdash D$;
4. $\Diamond p, \Diamond\neg p, \neg p \vdash D$;
5. $\Diamond\neg p, p \vdash D$ - из 3, так как $p \vdash \Diamond p$;
6. $\Diamond p,\neg p \vdash D$ - из 4, так как $\neg p \vdash \Diamond\neg p$;
7. $p \vdash D$ - из 1, 5;
8. $\neg p \vdash D$ - из 2, 6;
9. $\vdash D$ - из 7,8.

Или

1. $\neg\Diamond\neg p \vdash D$;
2. $\neg\Diamond p \vdash D$;
3. $\Diamond p \wedge \Diamond\neg p \vdash D$.

Рассуждая разбором случаев, получаем

$\neg\Diamond\neg p \vee \neg\Diamond p \vee (\Diamond p \wedge \Diamond\neg p) \vdash D$.

Посылка эквивалентна формуле

$(\neg\Diamond\neg p \vee \neg\Diamond p \vee \Diamond p) \wedge (\neg\Diamond\neg p \vee\neg\Diamond p \vee \Diamond\neg p)$, то есть является теоремой классического исчисления высказываний. Следовательно, $\vdash$ ***D***.

Семантическим методом строится **логика предикатов**.

Язык содержит символы:

а) P^k, Q^k, R^k, S^k, P^k_1, ... ($k \geq 1$) - k - местные предикатные символы;

б) x_1, x_2, x_3, ... - индивидные переменные;

в) a_1, a_2, a_3, ... - индивидные константы;

г) $\neg$, $\supset$, $\forall$, $\exists$ - логические термины;

д) (,) - скобки.

Определения терма и формулы обычные. Другие логические термины вводятся на основе обычных определений.

Семантика включает:

1) множество функций приписывания значений свободным индивидным переменным формул - множество функций S_1, S_2, ...;

2) множество ограниченных множеств описаний состояний.

Ограниченное множество описаний состояний для предикатной формулы - это множество из четырех элементов <***ОГ'***, ***W''***, D, | |> , где D - непустая предметная область, | | - функция приписывания значений индивидным константам, предикатным символам, а также сложным выражениям.

Если a - индивидная константа, то результат применения | | к a есть элемент из D, $|a| \in D$. ***W*** - множество возможных описаний состояний для формулы (множества формул). Отдельное описание состояния есть множество, элементами которого являются атомарные формулы без свободных переменных или отрицания таких атомарных формул, то есть если $A^n(t_1, t_2, ..., t_n)$ - атомарная формула без свободных переменных, то в описание состояния входит она или ее отрицание. A^n - предикатный символ, входящий в формулу (множество формул) для которой строится ограниченное множество описаний состояний. Если предметная область конечна, то можно ограничиться конечным множеством индивидных констант. Тогда описания состояний для формулы (конечного множества формул) окажутся конечными множествами. ***ОГ*** - интерпретация атомарных формул в качестве логически истинных (имеющих значение T), логически ложных (имеющих значение F) и логически недетерминированных (имеющих значение I). В результате такой интерпретации некоторые описания состояний могут исключаться из *W*. Результатом такой интерпретации (ограничения исходного множества описаний состояний) является множество *W′*. *ОГ′* образуется из *ОГ* за счет учета случаев невозможности совместной истинности конечных множеств атомарных формул (с отрицаниями или без них), интерпретированных в качестве логически недетерминированных высказываний. В результате этой дополнительной интерпретации конечных подмножеств описаний состояний их *W′* могут исключаться некоторые описания состояний из *W′*. Так образуется дополнительно ограниченное множество описаний состояний - *W′*. В описании состояния α функция $| \ |$ приписывает значение предикатному символу A^n. $|A^n|^\alpha$, то есть значение предикатного символа A^n в описании состояния α , есть множество n-ок элементов предметной области, являющихся значениями индивидных констант из n-ок, входящих в атомарные формулы $A^n(t_1, t_2,... t_n)$, содержащиеся в описании состояния (без знака отрицания). Будем считать, что результат распределения значений по свободным переменным формулы выражается формулой, в которой вместо переменных подставлены индивидные константы, являющиеся именами этих элементов из области интерпретации. (Есть аргументы в пользу точки зрения, согласно которой в этом случае не потребуется иметь несчетное множество имен предметов. Здесь этот вопрос не будет рассматриваться). Функция $||$ приписывает атомарной формуле в описании состояния значение истина или ложь в зависимости от того, входит ли она в это описание состояния с отрицанием или без такового. Естественно, что в первом случае она приписывает значение истина, а во втором - ложь.

Формула $\neg$ B принимает значение t в описании состояния омоса, если и только если в этом описании состояния формула B принимает значение f.

Формула A $\supset$ B принимает значение t в описании состояния омоса, если и только если в этом описании состояния формула A принимает значение f или формула B принимает значение t.

Формула $\forall x A(x)$ принимает значение t при распределении S в описании состояния омоса, если и только если при всяком распределении S′ таком, что оно приписывает всем свободным переменным формулы A(x), кроме x, те же значения, что и S, и кроме того приписывает некоторое значение переменной x, формула A(x) принимает значение t в этом описании состояния.

Формула $\Box$ B принимает значение t в описании состояния омоса при распределении S, если и только если при этом распределении формула B принимает значение t в каждом описании состоянии этого омоса.

Формула A общезначима в омосе при распределении S, если и только если она принимает при этом распределении значение t в каждом описании состояния этого омоса.

Формула A выполнима в омосе при распределении S, если и только если она принимает при этом распределении значение t в каждом описании состояния этого омоса.

Формула A истинна в омосе, если и только если она принимает значение t в каждом описании этого омоса при каждом распределении.

Формула A логически истинна (общезначима), если и только если она истинна в каждом омосе.

Формула A (логически) выполнима, если и только если она выполнима в некотором омосе при некотором распределении по свободным переменным.

Описанная семантика является семантикой предикатного исчисления S5 (исчисления PS5). Будем иметь ввиду следующую формулировку этого исчисления.

Схемы аксиом.

1. Схемы аксиом КИВ (классического исчисления высказываний).

2. Дополнительные схемы аксиом:

PA_1. $\forall x A(x) \supset A(t)$, терм t свободен для x в A(x);

PA_2. $\forall x(A \supset B) \supset (A \supset \forall x B)$, если A не имеет свободных вхождений x;

PA_3. $\Box (A \supset B) \supset (\Box A \supset \Box B)$;

PA_4. $\Box A \supset A$;

PA_5. $\neg\Box\neg A \supset \Box\neg\Box\neg A$.

Правила вывода.

П1. Modus ponens.

П2. Правило обобщения:

$$\frac{A}{\forall x A}$$

П3. Правило Геделя:

$$\frac{\vdash A}{\vdash \Box A}$$

Определения других логических терминов, в том числе знака возможности, обычные.

Обычным образом определяются понятия доказательства и вывода.

Опустим доказательство семантической непротиворечивости приведенного исчисления.

Метатеорема 1. *Каждая общезначимая формула доказуема в PS5.*

Ограничимся рассмотрением замкнутых формул.

Доказательству метатеоремы 1 предшествует доказательство следующих лемм.

Лемма 1. Множество замкнутых формул Δ, совместимое с PS5, можно расширить до максимального совместимого с исчислением $PS5_\infty$, образованным путем добавления к языку счетного множества новых индивидных констант, а к аксиомам - счетного множества аксиом (S_1), (S_2), в смысле Мендельсона, множества формул, не содержащих иных предикатных символов, кроме тех, которые входят в формулы из Δ (в дальнейшем будем иметь только такие замкнутые формулы, если не делается специально оговорки о виде формул).

Лемма 2. Максимальное непротиворечивое множество K обладает следующими свойствами:

1) если $\Gamma \subseteq K$ и $\Gamma \vdash A$, то $A \in K$;

2) если и только если $A \supset B \in K$, то $\neg A \in K$ или $B \in K$;

3) если $A \in K$, то $\Box A \in K$ или $\neg\Box A \in K$;

4) если $\neg A \in K$, то или $\Diamond A \in K$, или $\neg \Diamond A \in K$;

5) для каждой формулы A имеет место: или $\Box A \in K$, или $\neg\Diamond A \in K$, или $\Diamond A \in K$ и $\Diamond\neg A \in K$.

Доказательства лемм 1 и 2 опускаются.

Лемма 3. Максимальное непротиворечивое множество формул K, включающее множество Δ, является выполнимым в некотором омосе $\langle \boldsymbol{O\Gamma'}, \boldsymbol{W''}, D, |\ | \rangle$ со счетной областью D.

В силу леммы 1 множество всех модализированных формул M ($M \subset K$) можно расширить до максимального непротиворечивого множества формул (относительно исчисления $PS5_\infty$).

Рассмотрим все максимальные непротиворечивые расширения множества M. Каждое из этих расширений Θi включает некоторое множество β_i, являющееся некоторым описанием состояния. Пусть $\boldsymbol{W''}$ - множество всех описаний состояний, входящих в расширения M. Среди расширений M имеется и K (K есть некоторое Θ_i), включающее описание состояния α (α есть некоторое β_i). Множество указанных расширений M обозначим буквой Θ.

Введем функцию $\ulcorner\urcorner_{\beta_i,\Theta}$ ($\beta_i \subset \Theta$), обладающую следующими свойствами:

1) $\ulcorner A \urcorner_{\beta_i,\Theta} \in \{t, f\}$, где A - замкнутая формула;

2) $\ulcorner A \urcorner_{\beta_i,\Theta} = t$, если и только если $A \in \Theta_i$;

3) $\ulcorner a \urcorner_{\beta_i,\Theta} = a$, где a - индивидная константа (в качестве области D выбираем счетное множество индивидных констант и функция приписывает в качестве значения каждой индивидной константе ее саму);

4) функция $\ulcorner\urcorner_{\beta_i,\Theta}$ следующим образом приписывает значения k-местному предикатному символу A^k в Θ_i: $\ulcorner A^k \urcorner_{\beta_i,\Theta}$ есть множество таких k-ток $<c_1, c_2,\ldots c_k>$ элементов из D, что для каждой из них в β_i содержится формула $A^k(c_1, c_2,\ldots c_k)$, где $k \geq 1$.

Множеству Θ ставится в соответствие омос < *ОГ′*, *W″*, $|\,|$, D>. В последнем D - счетное множество индивидных констант.

Докажем, что функция $\ulcorner\urcorner_{\beta_i,\Theta}$ обладает всеми свойствами функции приписывания значений формулам в описании состояния β_i омоса <*ОГ′*, *W″*, $|\,|$, D>, то есть докажем, что $\ulcorner A \urcorner_{\alpha,\Theta} = |A|^{\alpha}$ и $\alpha \in W''$ рассматриваемого омоса.

Доказательство проводится индукцией по числу вхождений логических терминов в формулу A.

Базис. Формула A не имеет вхождений логических терминов, то есть является атомарной формулой. В этом случае $A \in \Theta_\alpha$, где $\Theta\alpha$ - максимальное непротиворечивое множество, включающее описание состояния α. Следовательно, $A \in \alpha$ и A истинно в этом описании состояния омоса.

Индукционное предположение. Доказываемое утверждение верно для формул, имеющих не более n вхождений логических терминов.

Индукционный шаг. Докажем, что утверждение леммы верно для формул, имеющих n+1 вхождение логических терминов.

Доказательство случаев, когда n+1 вхождением логических терминов является вхождение символов $\neg$, $\supset$ и $\forall$ опускается.

Пусть формула A имеет вид $\Box B$. Требуется доказать, что $\ulcorner \Box B \urcorner_{\alpha,\Theta} = t$, если и только если для любого описания состояния из рассматриваемого омоса верно, что в нем формула B имеет значение t.

Пусть $\ulcorner \Box B \urcorner_{\alpha,\Theta} = t$. Тогда $\Box B \in \Theta_\alpha$, а следовательно, любого Θ_i такого, что $\Theta_i \in \Theta$. $\Box B \supset B$ - теорема. Следовательно, для любого Θ_i верно $B \in \Theta_i$. Тогда для любого β_i верно $\ulcorner B \urcorner_{\beta_1,\Theta} = t$, и в силу индукционного предположения формула B истинна в любом описании состояния рассматриваемого омоса.

Пусть $\ulcorner \Box B \urcorner_{\beta_1,\Theta} \neq t$. Тогда $\Box B \notin \Theta_{\beta_1}$. Следовательно, $\neg \Box B \in \Theta_{\beta_1}$.

Возьмем множество модализированных формул M. Добавим к нему формулу $\neg B$. Полученное множество является непротиворечивым. Расширим его до максимального непротиворечивого множества формул. Получим некоторое множество Θ_i. Следовательно, в силу индукционного предположения, формула B является ложной в некотором описании состояния из рассматриваемого омоса.

Поскольку множество Δ входит в некоторое максимальное непротиворечивое множество и в силу этого все его элементы являются истинными формулами при приписывании им значений функцией $\ulcorner\urcorner_{\beta_1,\Theta}$, все эти формулы принимают значение "истина" в соответствующем описании состояния соответствующего омоса, то есть множество формул, совместимое с исчислением, выполнимо в описанной семантике.

Теперь несложно осуществить доказательство метатеоремы о семантической полноте.

Доказательство. Пусть замкнутая формула является общезначимой, и она не доказуема в PS5, а значит и в $PS5_\infty$. Тогда формула $\neg\neg$ A тоже недоказуема в $PS5_\infty$. Множество формул $\{\neg A\}$ непротиворечиво относительно этого исчисления и его можно расширить до максимального непротиворечивого множества формул K (в силу леммы 1). По множеству K можно образовать множество множеств Θ. В силу леммы 3 последнее множество выполнимо в некотором омосе. Тогда формула $\neg$ A выполнима в некотором омосе, что противоречит условию. Следовательно, формула A - теорема $PS5_\infty$ и PS5.

Метатеорема доказана.

Литература

1. *Ивлев Ю.В.* Модальная логика. М., 1991.
2. *Ивлев Ю.В.* Логические модальности. // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 7. Философия. 1996. № 6.

Е.А.Сидоренко

П.Флоренский о совместимости логической противоречивости Священного писания с божественным его происхождением

Рассуждение о том, что противоречивость *Священного писания* и *догматов веры* не только не противоречит божественному их происхождению, но и подтверждает таковое, опубликовано в книге “**Столпъ и утверждение истины**. ***Опытъ православной θеодицеи в двенадцати письмахъ свящ. Павла Флоренскаго***”. Москва, Путь, 1914. Я опираюсь здесь на факсимильное издание этой работы [1].

Будучи выдающимся религиозным мыслителем и математиком, П. Флоренский, как это видно из текста книги, был неплохо знаком с современной ему (символической) логикой. Во всяком случае ему были известны основополагающие работы П. Порецкого, Л. Кутюра, С. Джевонса, Е. Шредера, А. Уайтхеда, Б. Рассела и других выдающихся логиков того времени. Это обстоятельство позволило ему, используя, как он сам выражается, *символический метод логистики*, взглянуть со строгих логических позиций на проблему противоречий Священного Писания и догматов веры.

Для Флоренского вопрос о существовании указанных противоречий стоит весьма остро. Он знает, что противоречие влечет что угодно (в его собственной терминологии: включает в себя все). В связи с этим встает проблема (см. с.61), как можно разумно совместить признание противоречивости Священного Писания (а по Флоренскому такое признание с неизбежностью приходится делать) с божественностью происхождения Писания? А мыслитель несомненно желает опровергнуть ту свойственную *плотской рассудительности* (с.:60, 505) точку зрения, согласно которой противоречивость Писания говорит о небожественном происхождении последнего.

Мы дадим достаточно полное изложение логического подхода Флоренского, соблюдая по возможности стиль и фразеологию автора с тем, чтобы дать читателю возможность не только самому прийти к соответствующим оценкам приводимых рассуждений, но и получить удовольствие от того, как изыскано они представлены. А затем уже сделаем некоторые собственные комментарии.

Исследуемая проблема, по мнению мыслителя, представляет с формально-логической точки зрения частный случай одной из логических задач, сформулированных Льюисом Кэрроллом. Выглядит она так:

"q влечет r, но p влечет, что q влечет не-r, что должно заключить отсюда?"

Задачу эту, хотя и несколько, как он считает, односторонне сужая, Флоренский передает обычным языком в следующих выражениях:

"*Истинность суждения или понятия r с необходимостью вытекает из истинности другого суждения или другого понятия q, но некоторое третье суждение или третье понятие p таково, что из его истинности необходимо вытекает, что из q не может вытекать r, как было сказано раньше, а вытекает непременно отрицание r, не-r; что можно заключить из такой совокупности посылок?*" (с. 500).

Сперва может показаться, замечает Флоренский, что речь идет о разрешении какой-то необыкновенной и искусственно сочиненной трудности, не имеющей никакого жизненного значения. Но это далеко не так.

Задача Кэрролла не "сочинена", а выдвинута действительной нуждой. Но интереснее всего то, продолжает Флоренский, что сам автор задачи при теоретическом решении ее впал в ту же ошибку, в какую обычно впадают при решении ее на практике.

Собственное решение Кэрролла таково:

Если q влечет r, то невозможно, чтобы q включало не-r; значит, p влечет невозможное и, следовательно, ложно.

Такое решение, по мнению Флоренского, ошибочно, ибо возможно, что не *p* ложно, а ложно *q*, влекущее одновременно два противоречивых суждения *r* и не-*r*. Строго логическое решение дает путем весьма элементарных преобразований символический метод силлогистики. Символическая запись условий задачи выглядит так:

$$q \supset r \quad \text{(I)} \quad \text{и} \quad p \supset . \, q \supset \neg r \quad \text{(II)}$$

Первая импликация (I) эквивалентна

$$\neg r \supset \neg q \quad \text{(I')},$$

а вторая (II), после замены $q \supset \neg r$ на равносильное $\neg q \vee \neg r$, дает

$$p \supset . \neg q \vee \neg r \qquad \text{(II')}$$

Подставляя в (II') вместо $\neg r$ влекомое им в (I') $\neg q$, получаем:

$$p \supset . \neg q \vee \neg q \qquad \text{(III)},$$

т. е.

$$p \supset \neg q \qquad \text{(IY)},$$

что и дает решение задачи Кэрролла.

Какой же смысл вкладывает Флоренский в это предлагаемое им решение кэрролловской задачи? Смысл в том, что истинность p влечет отрицание q, а это означает, что **нельзя утверждать** q, **поскольку (в то время как, если, там где имеет силу)** p. Это, однако, вовсе не значит, что p нелепо, как полагал Кэрролл. Как равным образом не значит и того, что нелепо q, влекущее противоречивые следствия, как от имени здравого смысла полагал возможным утверждать Кутюра. $p \supset \neg q$ - это решение удовлетворяет и первому, и второму условиям задачи, признавая истинность и ценность их. А решение от здравого смысла не удовлетворяет ни первому, ни второму условию, ибо объявляет по меньшей мере одно из них простою нелепостью и, стало быть, лишь недоразумением. Выражаясь образно, можно представить себе, что условие (I) есть показание одного свидетеля, а условие (II) - другого. Третейский судья - здравый смысл - вмешавшийся в этот спор, легкомысленно заявляет, что либо показания второго свидетеля, - в силу его утверждения p, - либо показания обоих, в силу утверждения тем и другим q, - чепуха, вздор, нелепость.

Этими словами "чепуха", "вздор", "нелепость" здравый смысл говорит не то , чтобы кто-нибудь из спорящих лгал или ошибался, и тогда требовалась бы фактическая проверка показаний того и другого. Вовсе нет, он попросту говорит, что слова по меньшей мере одного из них бессмысленны и потому не заслуживают никакой фактической проверки, сами себя опровергая. Таким образом, здравый смысл не только не дает правильного решения, но и вообще не дает решения, ибо говорит: "*или один или оба говорят вздор*". Но мало того, он, не давая решения, удерживает спорящих от исследования, от фактической проверки своих утверждений, ибо нечего исследовать фактически то, что нелепо уже формально.

Тогда оба свидетеля, обиженные таким исходом дела, обращаются к судье более основательному - к логистике. Этот судья, разобрав дело, выносит приговор вполне определенный, а именно: $p \supset \neg q$, т. е., другими словами, не обижая ни одну из спорящих сторон упреком в бессмысленности показаний и даже признавая правоту обеих, судья утверждает , что ни тому, ни другому нельзя говорить о q в те времена и при тех условиях, когда получает силу p. При наличности p утверждение q отменяется, а во всех остальных случаях оно - в силе. Права первая сторона, утверждающая условие (I); права и вторая. утверждающая условие (II). Но и та и другая должны усвоить себе, что обычное, повседневное. повсеместное q перестает быть таковым в особых условиях, а именно при условии p.

Посмотрим теперь, что дает П. Флоренскому рассмотренная задача для решения той связанной с противоречивостью Священного Писания проблемы, которую он считает частным случаем этой исследованной кэрроловской задачи. Проблема ставится так:

"*Рационалист говорит, что противоречия Священного писания и догматов доказывают их небожественное происхождение; мистик же утверждает, что в состоянии духовного просветления эти противоречия именно и доказывают божественность Священного Писания и догматов. Спрашивается, какой вывод должно сделать из этих заявлений?*"

Обозначим, предлагает Флоренский, утверждение о противоречивости Священного писания и догматов как q, утверждение об их небожественном происхождении как r, а утверждение о состоянии духовного просветления как p. Очевидно, утверждение о божественном (то есть, о не-небожественном) происхождении будет обозначаться как $\neg r$. Тогда условия этой коллизии выразятся формулой:

$$(q \supset r) \wedge (p \supset. \ q \supset \neg r)$$

То есть, пример подходит под схему Л. Кэрролла. Стало быть, решая задачу, как хотел бы здравый смысл, мы пришли бы к выводу, что либо p, либо q бессмысленно, т. е. либо бессмысленно и невозможно "*духовное просветление*", либо - нелепость говорить о "*противоречиях Священного Писания и догматов*". В первом случае бессмысленным было бы заявление мистика, а во втором — и мистика, и рационалиста.

Ответ логистики нам дает:

$$p \supset \neg q,$$

то есть, правы и рационалист, и мистик. Как "*противоречия Священного писания и догматов*", так и "*духовное просветление*" не заключают в себе ничего нелепого и, следовательно . если на них ссылается честный рационалист и честный мистик, то они и на самом деле существуют. Но то, что для *ratio* есть противоречие, и несомненное противоречие, - то на высшей ступени духовного познания перестает быть противоречием; не воспринимается как противоречие, синтезируется, и тогда, в состоянии духовного просветления, противоречий нет. Поэтому на рационалиста нечего натаскивать сознание, что нет противоречий: они имеются, да, они несомненны. Но рационалист должен поверить мистику, что эти противоречия оказываются высшим единством в свете Незаходимого Солнца, и тогда они-то именно и показывают, что священное писание и догматы - выше плотской рассудительности и, значит, не могли бы быть придуманы человеком, т. е., — божественны.

В содержательных рассуждениях довольно часто используется идея *немонотонности*, которая предполагает возможность отказаться от признания верности первоначально принимаемого утверждения о следовании, когда не выполняются некоторые по умолчанию принимаемые условия[1]. Именно такого отказа в отношении утверждения $q \supset r$, где q говорит о противоречивости Священного Писания, а r о его небожественности, в общем-то и хочет Флоренский. Он может согласиться, что при обычных обстоятельствах утверждение о противоречивости Священного Писания (q) влечет его небожественность (r), но такая импликация утрачивает свою значимость, когда имеет место духовное просветление (p). Можно было бы сказать, что импликация $q \supset r$ признается истинной в силу того, что верным на самом деле является утверждение $\neg p \supset (q \supset r)$, а $\neg p$ принимается по умолчанию. Флоренский, правда, нигде явно не говорит о том, что эта импликация $q \supset r$ становится ложной, но он подчеркивает, что говорить при верности p о том, что "q влечет r" не имеет смысла. Во-первых, потому, что p влечет $\neg q$ и, во вторых, потому, что q при этом влечет $\neg r$. Мотивы, движущие Флоренским, и его аргументация вполне

[1] В настоящее время идея немонотонности реализуется в рамках построения специальных логических теорий, которые так и называются немонотонными логиками.

понятны с точки обычных неформализованных рассуждений, да и вообще с точки зрения обычного здравого смысла.

Парадоксально здесь то, что сам автор относится к этому самому здравому смыслу весьма критически, чтобы не сказать больше. И выбирает при этом в качестве, как он думает, уместного арбитра логистику или, говоря современным языком, классическую логику высказываний, которая на самом деле просто не в состоянии описать адекватным образом те аргументы, на которые опирается Флоренский.

В самом деле, в силу известных свойств материальной импликации верность импликации $q \supset r$ гарантирует верность $p \supset (q \supset r)$ при любом p. Таким образом, состояние духовной просветленности не отменяет того, что противоречивость Священного писания влечет его небожественность. Далее, вытекающая из посылок импликация $p \supset \neg q$ эквивалентна утверждению о неверности конъюнкции $p \wedge q$. что говорит о ложности p или о ложности q, чего, вообще говоря, недостаточно для утверждения о фактической связи между фигурирующими в импликации высказываниями. К тому же данная импликация, как легко видеть, равносильна импликации $q \supset \neg p$, которая вместе с признаваемой верностью q дает утверждение о неверности p. Иначе говоря, признавая противоречивость Священного писания, вы в соответствии с принятой логикой должны будете признать и отсутствие духовного просветления, и небожественность Священного Писания (в силу невозможности отвергнуть $q \supset r$).

Но, пожалуй, главная ловушка, которой, по-видимому, не заметил Флоренский, состоит в том, что содержательная интерпретация утверждения $p \supset . q \supset \neg r$, которую хотел бы он принять, оказывается не совсем правомерной. Интерпретация, эта состоит в том, что духовное просветление влечет, что из противоречивости как раз и следует божественность Писания. Но дело в том, что духовное просветление отрицает эту самую противоречивость (в соответствии с $p \supset \neg q$), и поэтому перейти от q к $\neg r$ в случае p оказывается столь же невозможным, как и ранее от q к r.

Остается сказать, что из посылок, входящих в условие кэрролловской задачи вытекают утверждения: $p \supset . q \supset r$ и $p \supset . q \supset \neg r$, равносильные $p \wedge q \supset r$ и $p \wedge q \supset \neg r$. Отсюда вытекает очевидная противоречивость $p \wedge q$. А это значит, что в рамках той логики, которой пользуется Флоренский из $p \wedge q$ можно вывести все что угодно.

Арбитр, к которому обратился автор, позволил обосновать те положения, которые были ему (автору) желательны. При этом автор однако не обратил внимания, что избранная в качестве арбитра логика позволят, одновременно обосновать и ряд положений которые, как мы могли видеть, фактически противоположны тому, что хотел доказать автор.

Очевидно, не имеет смысла упрекать Флоренского в том, что он относился современной ему логистике с полным доверием. О недостатках (парадоксах) классической логики, связанных со свойствами фигурирующей в ней материальной импликации, стали специально говорить и исследовать их значительно позже того, как была опубликована обсуждаемая здесь книга.

Конечно, идея *немонотонности*, а можно сказать, что именно ее, придавая содержательный смысл задаче Кэ́рролла, использовал (подробнее об этом см. [3]), пусть и не сформулировав этого в явном виде, Флоренский, не может быть реализована в рамках классической логики, где для материальной импликации, выступающей в качестве аналога следования, всегда верен принцип $A \supset. B \supset A$. В силу последнего, если A само представляет собой некоторую истинную импликацию, всегда можно считать эту импликацию следствием из произвольного утверждения. Отсюда ясно, что никакие вновь открывшиеся дополнительные обстоятельства не позволяют ее отвергнуть, так как все утверждения, включая даже ее собственное отрицание, эту импликацию только подтверждают.

Это обстоятельство, как я думаю, не обесценивает рассмотренных выше рассуждений Флоренского, так как они демонстрируют очевидный практический смысл некоторой как будто бы абстрактной логической проблемы, а значит стимулируют мотивации для поисков ее решения.

Может возникнуть резонный вопрос, можно ли было обосновать, как этого хотел Флоренский, божественность Священного Писания, решая задачу Кэрролла с помощью некоторой немонотонной (или какой бы ни было еще свободной от недостатков классической) логики? Мы уже видели выше, что при реализации идеи немонотонности вторая посылка $p \supset. q \supset \neg r$, действительно, позволила бы отвергнуть первую $q \supset r$. Но в этом случае, конечно. нельзя было бы уже делать вывод, что $p \supset \neg q$. Что же касается самой второй посылки, говорящей, что в случае духовного просветления противоречивость Священного Писания влечет его божественность, то ее обоснованность становится не предметом логики, но исключительно предметом веры. Флоренский это прекрасно понимал, призывая рационалиста в этом случае *поверить* честному мистику.

Заканчивая, я хотел бы обратить внимание на то обстоятельство, что Флоренский для рассмотрения и обоснования решаемой им богословской проблемы привлекает современную ему символическую логику. Это несомненно делает возможным и более ясную постановку задачи, и более четкое ее понимание. Это же обстоятельство позволяет перевести обсуждение обозначенной проблемы на рациональный уровень и выявить реальный предмет спора и обсуждения. Очевидно, что сейчас, когда логика достигла по сравнению с тем временем, когда обсуждал свои проблемы Флоренский, весьма высокого уровня, в частности, несравненно повысила свои выразительные возможности, многие философские и методологические вопросы с еще большим основанием следовало бы обсуждать с использованием средств и методов логики. Для нас, к сожалению, это не стало не только нормой, но даже и привычным делом. Давняя работа Флоренского и сегодня могла бы быть нам в этом отношении примером.

Литература

1. Из истории отечественной философской мысли. П.А. Флоренский. Соч., Т1 (1) (с. 1- 490) и Т1 (2) (с. 491 - 840), М., 1990.
2. *Сидоренко Е.А.* П.Флоренский: Логистика и теодицея.- Современная логика: проблемы теории, истории и применения в науке. Санкт-Петербург, 1996.
3. *Сидоренко Е.А.* Идеи немонотонной и паранепротиворечивой логики у П. Флоренского. - Логические исследования. Вып. 4 (в печати).

Г.В.Гриненко

Логико-семиотический анализ гимнов Авесты

В современных концепциях языка выделяется и фиксируется целый ряд существенных функций языка: когнитивная, аккумулятивная, эмоциональная и т.п. Но той функцией, к которой обычно привлечено наибольшее внимание большинства исследователей, является, пожалуй, коммуникативная, именно она характеризуется чаще всего как исходная и основная, или, по крайней мере, как основная она называется в паре с когнитивной.

Коммуникативная функция языка активно изучается в ряде современных дисциплин: в теории коммуникации, в семиотике, лингвистике (прагматика естественного языка, теория речевых актов и т.д.), психолингвистике и других дисциплинах. Что же касается логики, то в ней в течении 20 века весьма плодотворно развивались синтаксис и семантика, но почти не затрагивались проблемы прагматики, которая больше всех остальных разделов логики подходит для анализа коммуникативных актов (хотя бы уже потому, что оперирует понятиями "контекста использования", "субъекта-пользователя" и т.п.). Возможно, такая ситуация сложилась потому, что ряд основоположников современной логики, в частности, Г.Фреге, не только работали в атмосфере антипсихологического настроя, но и сами принимали активное участие в борьбе с психологизмом. Так, хотя, занимаясь проблемой неэкстенсиональных контекстов, Г.Фреге и зафиксировал возможность различных смыслов одного и того же имени для различных субьектов-пользователей языка, но тем не менее их фигуры не привлекают у него особого внимания. Может быть это происходило и потому, что для идеального формализованного языка, подходящего для построения теоретической арифметики, построению которого он уделял столько внимания, различие между субьектами-пользователями сведено к нулю, а единственной их функцией является строгое следование системе синтаксических и семантических правил. В результате фигуры субъектов коммуникации настолько далеко вынесены за рамки изучаемых вопросов, что едва обозначены, что же касается причин и целей коммуникации, т.е. того, ради чего она собственно и осуществляется, то они практически полностью игнорируются. Пока речь идет о формализованном языке и об изучении структуры логического вывода, такое абстрагирование вполне оправдано, но в исследованиях в области логического анализа естественного языка ситуация иная.

Язык в процессе коммуникации есть всего лишь средство, и я хочу подчеркнуть, что рассматривая языковые выражения в структуре коммуникативного акта, где они реально используются, соотнося средства с целью, мы можем тем самым выявить целый ряд существенных свойств языка, которые без этого остаются нераскрытыми, причем свойств, которые могут оказаться релевантными и для решения ряда важных для логики проблем. В частности, центральные для семантики проблемы смысла и значения языковых выражений не могут, с моей точки зрения, получить полное и адекватное решение без учета различных аспектов коммуникативного акта, в котором данные выражения реально используются.

Сравнивая лингвистический и логический подход к изучению естественного языка, легко увидеть такое различие между ними как тип используемых примеров. В лингвистике, где естественный язык (или языки), изучается во всем многообразии его свойств, исследователь в качестве примеров чаще всего рассматривает чужие (уже существующие) тексты, при проведении же логического анализа естественного языка, где конечной целью является изучение определенных когнитивных структур, большинство авторов сами придумывают подходящие для их целей примеры, рассматривая тем самым самих себя в качестве носителей языка. Но именно это облегчает рассмотрение придуманных предложений как контекстно-независимых, что в свою очередь коррелирует с идущей от неопозитивизма тенденцией считать атомарные предложения независимыми друг от друга, а это в свою очередь нашло свое воплощение и в правилах построения формализованных языков, и в семантических моделях для них (в частности, в семантике возможных миров).

Такая методологическая установка накладывает свой отпечаток на ряд рассматриваемых в логике проблем. Так, например, сама постановка вопроса о референциальном и атрибутивном использования имен изначально содержит в себе не только проблему адекватного понимания и интерпретации самой сути референциального и атрибутивного использования, но и проблему определения типа использования в каждом конкретном случае. Однако рассматривая способы элиминации этой неопределенности, логики практически не обращают внимание на то, как обычно устраняется эта неопределенность в естественном языке при реальном использовании соответствующих выражений в коммуникативных актах: а в них эта неопределенность чаще всего устраняется за счет дополнительной информации, содержащейся в контексте использования, т.е. языковое выражение выступает как контекстно-зависимое.

Вопрос о связи смысла и значения (интенсионала и экстенсионала) языкового выражения с контекстом его использования начал всерьез обсуждаться в логике только в 70-80 годы в связи возникшим интересом к контекстам с пропозициональными установками и с демонстративами. Особый вклад в эту область внесли работы Р.Монтегю, где вводится принципиально важное понятие точек соотнесения ("points of view"), которое позволяет учитывать некоторые факторы зависимости смысла и значения языковых выражений от контекстов их использования.

Данная работа представляет из себя попытку применить методы логики и семиотики для анализа использования текстов в структуре коммуникативного акта (КА). Особенностью работы является выбор в качестве объекта исследования сакральных текстов и сакрального коммуникативного акта (SKA). Исходной целью работы было рассмотрение вопроса о том, являются ли традиционные методы логико-семантического анализа вполне адекватными для такого рода контекстов? Отрицательный ответ, полученный в процессе исследования, закономерно повлек за собой задачу выявления тех факторов, которые оказывают влияние на смысл и значение рассматриваемых текстов, и тем самым несколько изменяют и обогащают само наше понимание смысла и значения языковых выражений. Вторая задача, естественно воз-никающая в ходе исследования, состоит в том, что могут дать методы логики для анализа и понимания самих сакральных текстов и их использования в сакральных коммуникативных актах? Отнюдь не претендуя на решение этих проблем, я скорее намерена в данной работе выявить ряд факторов, существенных для их решения.

В качестве непосредственного объекта изучения взяты гимны (яшты) Авесты - священной книги зороастрийцев. Точнее, речь пойдет не о самих сохранившихся текстах, а об их имеющихся переводах на русский язык: переводе И.Стеблин-Каменского [1] и для "Гимна Ардва-Суре" еще и переводе И.Брагинского [3].

В качестве семантической модели для данных текстов естественно взять виртуальный мир, представляющий из себя зороастрийскую мифологическую реальность. В этой реальности мир имеет два первоначала: одно из них - это бог Добра, Света и Истины Ахура-Мазда, а другое - бог Зла, Тьмы и Лжи Анхра-Манья. Считается, что в настоящее время мир имеет трехчастное (по вертикали) строение: земной, надземный (небесный) и подземный. В небесном мире пребывают в основном добрые боги - ахуры, порожденные Ахура-Маздой, на небо же попадают после смерти души благочестивых людей-зороастрийцев. В подземном мире пребывают дэвы, там же оказываются после смерти души людей, не попавшие на небо. Земной мир и люди есть творение Ахура-Мазды, но и то, и другое частично испорчено Анхра-Маньей. Силы Добра и Зла ведут между собой постоянную борьбу, которая когда-нибудь закончится последней битвой, на ее результат серьезное влияние могут оказать люди.

Одной из особенностей зороастризма является стройное учение о Благой Мысле, Благом Слове и Благом Деле и их оппонентах: Злой Мысли, Злом Слове и Злом Деле. Мысли, слова и дела людей будучи благими, увеличивают силы ахуров, будучи злыми - силы дэвов. Священные тексты представляют из себя высшую форму Благого Слова, они считаются абсолютной истиной и правильное произнесение их зороастрийцами весьма значительно увеличивает силы ахуров [1,с.64]:

"Когда бы меня люди
Мое зовущей имя
Молитвой почитали,
Как молятся молитвами,
Их имена зовущими,
Они другим богам,
Я сразу приобрел бы
Мощь десяти коней,
Мощь десяти верблюдов,
Мощь десяти быков,
И гор десятка силу,
И рек десятка мощь"

Так как человеческое поведение оказывает серьезное влияние на баланс добрых и злых сил в мире, то регулярное произнесение соответствующих Священных слов в структуре сакрального ритуала является важнейшей обязанностью зороастрийцев. Каждый яшт есть обращение к какому-либо ахуру, отсюда любое "нормальное" произнесение гимна есть КА и, так как речь идет о коммуникации с божеством, то и сакральный коммуникативный акт (SKA). Именно поэтому мы и намерены рассматривать эти гимны в структуре КА. Ее основными элементами являются на наш взгляд следующие:

Ситуация продуцирования	Языковое выражение	Ситуация восприятия
1.Коммуникатор - Kr 2.Мысль,которую выражает коммуникатор - V^ 3.Акт продуцирования, в частности,речевой акт I- 4.Условия,в которых продуцируется языковое выражение (время, место, особые условия- t,p,q) 5.Причина и/или цель продуцирования - c-m 6.Результат воздействия на коммуникатора	Священные слова V	1'.Коммуникант - Kt 2'.Мысль,которую воспринимает коммуникант - ^V 3'.Акт восприятия, в частности, акт выслушивания-I 4'.Условия, в которых воспринимается языковое выражение (время, место, особые условия-t',p',q') 5'.Причина и/или цель восприятия - c'-m' 6'.Результат воздействия на коммуниканта

Теперь коммуникативный акт, содержащий компоненты 1-5, можно обозначить как:

1)Kr(t,p,q)/c-m I-{V^}-V-{^V} -I Kt(t',p',q')/c'-m'

Наиболее простым и очевидным путем изучения использования гимнов в структуре КА, является последовательный анализ всех составляющих КА, что мы и намерены проделать. Однако, как позволяет выявить проводимый анализ, все эти составляющие тесно взаимосвязаны.

Структура КА. Так как структура изучаемых гимнов достаточно сложна, абстрагируемся пока от ряда элементов КА, и обозначим его предельно просто:

2)Kr I- V -I Kt

Но из всех гимнов, приведенных в [1], только для "Гимна Солнцу", взятому в качестве V, можно говорить о такой простой структуре КА. Относительно всех остальных яштов необходимо учитывать не только то, что гимн используется в акте коммуникации, но и то, что он сам содержит описание различных КА, (точнее - SKA: во всех гимнах имеет место диалог Заратуштры с Ахура-Маздой), а в ряде случаев внутри такого КА содержатся еще одно описание КА. Отсюда возникает необходимость дифференциировать уровни КА и участвующих в них субъектов. При рассмотрении КА, в котором использовано выражение V, будем говорить о нем, как о КА первого уровня (или КА глубины 1), и называть его коммуникатора и коммуниканта соответственно внеконтекстуальным коммуникатором (Kr^o) и коммуникантом (Kt^o), а субъектов КА, описываемого в V, будем называть внутриконтекстуальным коммуникатором (Kr^i) и коммуникантом (Kt^i). Если же и V_i содержит описание КА, то соответствующих субъектов внутри текста V_i будем называть внутри-внутриконтекстуальными коммуникатором (Kr^{ii}) и коммуникантом (Kt^{ii}). Трехуровневый КА (или КА глубины 3) будет выглядеть как:

3)Kr^o I- [Kr^i I- [Kr^{ii} I- V_{ii} -I Kt^{ii}] -I Kt^i] -I Kt^o

С КА большей глубины в рассматриваемых текстах [1] мы не встречаемся.

Анализ КА в качестве отправной точки может иметь как единичный факт конкретного КА, где детерминированы все его конституэнты, так и возможные ситуации использования определенного текста в различных КА. По отношению к анализируемым гимнам необходимо рассматривать оба эти варианта: в текстах гимнов описываются конкретные КА, но сами гимны использовались и могут использоваться в самых различных КА: различными субъектами, в различное время, с различными целями и т.п..

Коммуникатор и коммуникант. Чтобы сам КА мог бы состояться, Kr^o должен быть: во-первых, способен чисто физически продуцировать текст (т.е. произнести или написать его), а во-вторых, он должен быть либо автором текста, сочиняющим его по мере продуцирования, либо же быть знакомым с ним заранее, причем настолько хорошо, чтобы быть в состоянии его воспроизвести. Это последнее условие особенно важно, ибо, если порождение сакрального текста есть единичный акт (с точки зрения верующих зороастрийцев), то используется он многочисленными субъектами различных поколений.

Что касается Kt^o, то он должен быть способен воспринять текст (т.е. услышать произносимый или прочитать написанный).

Особенностью данной семантической модели является то, что кроме людей возможными субъектами КА могут быть еще и сверхъестественные существа, т.е. множество всех возможных коммуникаторов и коммуникантов составляют субъекты трех различных групп: во-первых, это люди (L), во-вторых, это ахуры (A) и, в-третьих, это дэвы (D), т.е. $S= \{L \cup A \cup D\}$. В принципе любой $s \in S$ есть возможный Kr° или Kt° по отношению к гимну V, что же касается внутриконтекстуальных и внутри-внутриконтекстуальных коммуникаторов и коммуникантов, то они чаще всего уже заданы в описании КА глубины 2 и 3.

На практике количество субъектов, которые могут выступать в качестве Kr° по отношению к гимну Авесты, сильно ограничивается таким очевидным условием, как необходимость для Kr° знать этот текст. Сакральные тексты (и их правильное произнесение) хранились в глубокой тайне и сообщались только посвященным (в частности, жрецам):

Пускай заклятье это,
Спитама-Заратуштра,
Не скажут никому,
Отец пусть скажет сыну,
И брат родному брату,
И жрец ученику." [6,46]

(Некоторые причины такой скрытности станут очевидны позднее, при обсуждении вопроса о результатах КА).

Поэтому, хотя зороастриец-мирянин мог и должен был регулярно молиться ахурам (в частности, петь Гаты), но при необходимости произнести гимн, он обращался за помощью к жрецу, который совершал положенное жертвоприношение и произносил соответствующий яшт.

Следовательно, в такой ситуации мы имеем дело с двумя Kr°: непосредственным Kr°, т.е. жрецом, собственно произносящим текст V, включая в него и просьбу "заказчика" - m, и опосредованного Kr°, от которого и исходит данная просьба.

Каждый гимн содержит прямое обращение к соответствующему ахуру. Отсюда любой гимн Авесты можно обозначить как V(a*), где "a*" есть имя ахура, к которому гимн V непосредственно обращен. Будем называть a* лигитимным внеконтекстуальным коммуникантом гимна V(a*):

4) Kr° I- V(a*)-I a*

Но любой текст, раз уж он существует и кому-то известен, может быть сообщен и не лигитимному коммуниканту. Кроме того, возможен случай, когда произносимый текст воспринимают ("подслушивают") и/или иные субъекты. Так, в цитированном на с.2 фрагменте Тиштрия обращается к людям, но они его не слышат, а слышит Ахура-Мазда. Таким образом возможна ситуация:

4a) Kr° I- V(a*) -I $\{ a^*, a_1, .., a_n \}$,

С другой стороны, хотя каждый гимн при его произнесении и обращен к определенному ахуру, но в принципе не обязательно, что при каждом произнесении этого гимна соответствующий ахур его воспринимает. А это требует от нас провести различие между потенциальным (находящимся в "зоне восприятия" - p':pRp') и не потенциальным коммуникантом, а для потенциальных - между актуальными (действительно воспринимающими) и не актуальными Kt каждого КА. Ситуация, когда легитимный коммуникант не является потенциальным коммуникантом, может предположительно иметь место тогда, когда данный ахур (аналогично - дэв) находится за пределами некоторого критического расстояния, скажем, за границей земного мира:

4в)Kr (t,p,q) I- V(a*) -I a* (t',p*:(p*>p'&pRp'),q)

- здесь a* не есть потенциальный Kt°.

4c)Kr°(t,p,q) I- V(a*) -I a* (t',p':pRp',q)

- здесь a* есть потенциальный, а значит, и возможно актуальный Kt°.

Если легитимно-потенциальный Kt воспринимает обращенный к нему гимн, то будем называть его актуальным Kt. Но он может и не пожелать слушать гимн, в таком случае он не является актуальным коммуникантом.

4d) Kr (t,p,q) I- V(a*) +I a* (t',p':pRp',q)

Мысль выраженная и воспринятая. Еще ряд ограничений будут накладываться на возможных Kr° и Kt° текста V в зависимости от того, как понимается суть КА, т.е. считаем ли мы необходимым, чтобы в процессе КА происходила передача информации и какие ограничения накладываем на тип информации, ее способ выражения и передачи. Так, в современной семиотике общепризнанно, что информация может выражаться и без помощи языковых средств, и соответственно под текстом может пониматься танец, ритуал и т.п. С другой стороны, далеко не каждое использование языкового выражения в КА есть собственно передача информации или передача именно той информации, которая непосредственно заключена в данном языковом выражении. В последнем случае необходимо строго различать два различных смысла одного и того же высказывания: один обычный, связанный с применением нормальных правил языка, а другой контекстно-зависимый, связанный с данным конкретным КА.

Если считать, что КА в обязательном порядке включает передачу информации, заключенную в V, то появится требование, чтобы Kr понимал то, что говорит или пишет, т.е. мысль

V^, которую он выражает в V, а Kt - то, что слышит или читает, т.е. мысль ^V, которую он считает выраженной в V. Заметим, что в общем случае V^ не обязательно тождественна ^V. В случае, когда V^=^V, будем говорить, что Kt адекватно понял V, а в случае, когда V^=^V, будем говорить, что Kt не адекватно понял V.

Особенностью использования сакральных текстов является и такая ситуация, когда коммуникатор повторяет почерпнутый из какого-либо источника текст на священном языке, порой не понимая его смысл (католики обращаются к Богу с молитвами на латыни, мусульманине - в том числе не-арабы - на арабском и т.п.). Такой КА можно рассматривать как фрагмент 5.b) более сложного двух (или более) ступенчатого КА:

5.a) Kr_1 I- V^-V -I Kt_1

5.b) Kr_2 I- V-^V -I Kt_2 , где $Kt_1=Kr_2$

С такой же ситуацией мы сталкиваемся тогда, когда человека ($Kr_2=Kt_1$) используют как живой магнитофон, заставляя заучить непонятный ему текст и передать другому (Kt_2), но здесь первый Kr и последний Kt понимают мысль, выраженную V.

Особым вариантом является случай, когда текст V вообще ни для кого из людей не является понятным, причем бессмысленными могут быть как отдельные фрагменты текста, так и весь текст в целом. Анализ таких текстов не характерен для логики, уже наличие отдельного бессмысленного слова или словосочетания в предложении не позволяет говорить о смысле целого предложения в тех семантиках, где смысл (интенсионал) сложного выражения есть производное от смыслов составляющих.

А вот, например, для древнетамильской поэзии характерно включение в состав текста заведомо бессмысленных слов (асей-чоль), которые служат только для придания красоты звучанию текста. И здесь необходимо отметить, что хотя такой поэтический текст и используется некими субъектами в КА, но передача информации, заключенной в тексте является не единственной и далеко не главной целью самого КА.

Аналогичное утверждение можно сделать и относительно использования сакральных текстов: чаще всего гимны, обращенные к некоторому божеству, содержат рассказы о подвигах самого этого божества. Очевидно, что передача коммуниканту информации, заключенной в тексте собственно гимна, не является здесь главной целью КА.

Именно поэтому в сакральных ритуалах возможно использование как полностью бессмысленного для коммуникатора текста, так и текста, содержащего в своем составе отдельные бессмысленные слова и словосочетания. Такие языковые выражения могут быть остатками более древнего сакрального текста или языка или заимствованиями из чужого языка.

Стремление сохранить сакральный текст в его неприкосновенности, отмечаемое практически во всех древних культурах, связано с представлениями о магическом характере самого текста, его звучания или, что бывает реже, написания. Поэтому его перевод на современный или какой-либо иностранный язык приводит к уменьшению или же полной утрате им его магической силы. Причина этого обычно усматривается в том, что слова священного языка считаются тесно связанными с сутью означаемых ими объектов (такие знаки мы классифицируем как "сопричастные" означаемому, см.[4]).

Но во всех случаях, когда языковое выражение ранее имело для каких-либо людей определенный смысл, а затем со временем его утратило, мы можем считать, что оно все еще сохраняет смысл для богов и тогда его использование описывается в многоступенчатом случае типа 8а)-8в), где Kt_2 есть божество, всегда понимающее текст, а Kr_1 есть человек, *еще* понимающий текст.

Однако для сакральных текстов возможен и такой случай, когда используемый набор языковых знаков вообще ни для кого не обладает смыслом (не выражает определенную мысль), но он используется потому, что считается обладающим магической силой, а его произнесение - производящим воздействие на реальность. В таком случае в КА вообще нет передачи информации.

Продуцирование и восприятие. Термин "продуцирование" кажется несколько неуклюжим, но я его применяю, так как не нашла более подходящего, способного как и он охватить все необходимые случаи, т.е. во-первых, порождения как мысли, так и слова и дела; а во-вторых, случаи произнесения (во внутренней и внешней речи) и написания языкового выражения, а так же, при необходимости, и использования языков жеста, танца и т.п. Термин "восприятие" более естетственно охватывает все аналогичные случаи.

Применяя термин "продуцирование" к предложению, я буду тем самым отличать само произнесение (или написание) предложения от утверждения суждения, выраженного в данном предложении, так как только по отношению к утверждаемому суждению современной логике принято говорить об его истинности или ложности, хотя акт продуцирования предложения в КА чаще всего есть одновременно и акт утверждения суждения.

Учитывая религиозное значение истины в зороастризме, в рамках данной семантической модели в тех случаях, когда коммуникатором является ахур, устанавливается своеобразное взаимоотношение между предикатами "говорить", "утверждать", "считать истинным" и "быть истинным", т.е. для любого предложения, которое произносят ахуры, они утверждают суждение, выражаемое этим предложением, а утверждают они только то, что считают истинным; и все то, что они считают истинным, является истинным. То же относится к Заратуштре и, возможно, к некоторым праведникам. Для обычных искренне верующих зороастрийцев можно зафиксировать, что если они нечто говорят, то и утверждают, а если утверждают, то и считают это истинным (Геродот писал, что персы учат своих детей двум вещам: ездить верхом и говорить правду), но так как они (в отличии от богов) могут заблуждаться, то отсюда еще не следует, что это суждение действительно является истинным. Для дэвов и их сторонников-людей такая связь между вышеназванными предикатами отсутствует.

Порождение мысли или совершение жертвоприношения оказывает магическое влияние на реальность аналогично произнесению Священных слов.

Специфической чертой восприятия ахуров (и дэвов) является то, что они способны "слышать" даже мысли людей.

Условия КА: пространство и время. Еще одно ограничение связано с тем, что два субъекта участвуют в едином КА. Если текст продуцируется в устной форме и мы абстрагируемся от возможности фиксации устной речи (с помощью каких-либо технических средств или путем механического запоминания текста, как это имеет место в 8.а)), то отсюда необходимо, чтобы в тот период времени t, когда Kr, находясь в месте p, продуцирует текст V, Kt существовал и находился бы в пределах слышимости, т.е. t=t' и pRp'. Если же учитывать возможность фиксации и передачи устной речи или же Kr пишет текст, то Kt может воспринять этот текст спустя значительный промежуток времени и на значительном расстоянии.

В течении нескольких первых столетий существования зороастрийской религии, ее священные тексты существовали исключительно в устной форме, так как письменность считалась порожденьем злого духа Анхра-Манью. Следовательно, при использовании гимна Авесты в одноступенчатом КА, обязательно имеет место t=t'. После македонского завоевания, когда погибло большое количество жрецов - знатоков священных текстов, а ними и многие тексты, была разработана специальная письменность и записана Авеста. С этого момента t' может на столетья и тысячелетья отстоять от t. Для простоты будем в дальнейшем рассматривать только "классический" вариант использования гимнов, т.е. в устной форме, когда t=t'.

Что же касается расстояния "слышимости", т.е. pRp', то при общении между людьми оно естественное, при общении между различного рода божествами оно не определено (в известных нам текстах), а при общении между людьми и божествами зафиксировано, что ахуры и дэвы способны воспринимать людские молитвы только в пределах земного мира. Это ограничение отмечено в [1, с.64], где Тиштрия жалуется, что если он будет побежден Апаошей и изгнан им, то останется без людских молитв; аналогично, в [1, с.170] изгнанные с земли молитвой Заратуштры:

...прятались под землю	*Оставшись без молений,*
Отвергнутые дэвы,	*Лишенные молитв.*

Особые условия КА. Важнейшим из условий использования сакрального текста в общении с божествами является жертвоприношение. Правда SKA возможен и без жертвоприношения, такими SKA являются различные "повседневные" моления. Но произнесения гимнов практически обязательно сопровождаются жертвоприношениями. И то, что жертвоприношения играют здесь важнейшую роль, видно уже из того, что почти во всех яштах Заратуштра спрашивает Ахура-Мазду как правильно совершать жертвоприношение легитимному коммуниканту гимна.

Причины-цели. Личность субъектов, участвующих в КА, теснейшим образом связана с причинами-целями осуществления самого КА. В самом общем виде можно выделить по два вида причин и целей для коммуникатора:

Причина	Цель
c_1.желание увеличить силы Добра в частности,силы ахура, являющегося лигитимным Kt°	m_1.увеличение сил Добра и. в частности, силы ахура, являющегося легитимным Kt°
c_2.желание получить какую-то личную выгоду	m_2.получение личной выгоды

Наличие одной из этих двух причин-целей или же их обеих вместе зависит от типа коммуникатора. Так, сторонники Добра могут произносить Священные слова и совершать жертвоприношения просто ради увеличения сил Добра, даже не преследуя при этом никаких личных интересов (хотя, опосредованно, они от этого и имеют какую-то пользу, так как выигрывает вся партия Ахура-Мазды, а в некоторых случаях, и личную выгоду - даже не прося о ней специально: например, Тиштрия дарует молящимся ему "полнейшую удачу" без специальных просьб об этом), а могут и стремиться к достижению обеих этих целей. Тогда как дэвы и их сторонники среди людей заинтересованы исключительно в удовлетворении собственных корыстных интересов - c_2.-m_2., хотя, в силу механизма действия молитв, они и могут стремится увеличить силы того ахура, к которому обращаются, чтобы он смог выполнить их просьбу (c_1.-m_1). Причем для достижения первой цели произносится текст собственно гимна (J), вторая же цель (m_2) получает специальное выражение в особой последней части яшта (обозначим ее как $E(m_2)$, где E - оператор просьбы). Тогда полный текст гимна будет выглядеть как $V=J\&E(m_2)$.

Рассматривая причины и цели участия в КА ахуров в качестве коммуникантов, можно выделить две пары аналогичных причин и целей:

Причина	Цель
a'_1.желание увеличить свои силы	m'_1.увеличение своих сил
a'_2.желание помочь своим сторонникам	m'_2.помощь своим сторонникам

Причем помогая своим сторонникам, ахуры преследуют и личную выгоду, ибо чем больше у них будет союзников на земле и чем чаще те будут совершать моления и жертвоприношения, тем больше будут силы самих ахуров. Не случайно в гимнах мы часто встречаем мольбу ахуров к людям:

О, кто меня прославит,
Кто будет мне молиться,
Свершая возлиянья,
Священные и чистые,
Из хаомы с молоком?
[1,с.28]

Когда бы меня люди
Мое зовущей имя
Молитвой почитали...
[1,с.61]

Отсутствие же человеческих молитв - несчастье для ахуров:

Несчастье мне, Ахура!
Беда, Растенья-Воды!
Благая вера, горе!

Меня не будут люди
Мое зовущей имя
Молитвой почитать! [1,с.64]

Результат коммуникации. Анализ вопроса о результатах КА неизбежно требует от нас обращения к причинам и/или целям, которые пытаются реализовать Kr и актуальный Kt, участвующие в конкретном КА, ибо результат коммуникации можно оценить прежде всего как достигнутую или недостигнутую цель.

Говоря о возможных результатах коммуникации для Kr, мы проградуируем шкалу эффективности, проставив на ней три отметки: позитивный эффект (получение всего просимого), нулевой (не получение просимого) и негативный (не получение просимого плюс наказание).

9) Для Kr^o Рез.[Kr^o(t,p,q)/c-m I- V(a*)(=J&E(m))
-I a* (t,p':pRp',q')/c'-m'] = m(позитивный эффект)

10) Для Kr^o Рез.[Kr^o(t,p,q)/c-m I- V(a*)(=J&E(m))
-I a* (t,p':pRp',q')/c'-m'] = 0(нулевой эффект)

11) Для Kr^o Рез.[Kr^o(t,p,q)/c-m I- V(a*)(=J&E(m))
-I a* (t,p':pRp',q')/c'-m'] = 0+n(негативный эффект)

Или проще:

9a)Рез.КА для Kr^o = m (позитивный эффект)

10a)Рез.КА для Kr^o = 0 (нулевой эффект)

11a)Рез.КА для Kr^o = 0+n (негативный эффект)

При этом имеется тесная связь между личностью Kr^o и результатом КА. Для получения позитивного эффекта КА, обращенного к ахуру, человек должен быть искренним сторонником "веры Ахуры с Заратуштрой", не быть физически, умственно или морально "ущербным", постоянно совершать действия, которые направлены на усиление ахуров (в частности, регулярно петь Гаты), находится в состоянии ритуальной чистоты, а кроме того, знать и уметь правильно произносить Священные слова и правильно совершать жертвоприношения. При этом, если мы вспомним, что у нас может быть непосредственный и опосредованный коммуникатор, то встает вопрос о том, какие требования к кому из них относятся. Очевидно, что знание текстов гимнов, умение их правильно произносить и умение правильно совершать жертвоприношения необходимы для непосредственных коммуникаторов, т.е. жрецов. К обоим коммуникаторам относятся требования быть сторонником веры Заратуштры, регулярного пения Гат и выполнения других сакральных действий. Что же касается требования ритуальной чистоты, отсутствия физической, умственной и моральной ущербности, то они обязательны для непосредственного коммуникатора, но из известных нам текстов остается неясным, необходимы ли они для опосредованного коммуникатора.

Таким образом, множество субъектов, чьи обращения к ахурам дают позитивный эффект, будет состоять из ахуров и тех людей (Z), которые обладают набором соответствующих качеств: $S'=\{Z \cup A\}$.

12а) Рез.КА для всякого $Kr \in \{Z \cup A\} = m$

10в) Рез.КА для всякого $Kr \in \{Z \cup A\} = 0$ или $0+n$

Интересно отметить, что множество людей, обращение которых дает позитивный эффект (Z), несколько варьируется в зависимости от личности лигитимного коммуниканта, т.е. того ахура, к которому обращается коммуникатор. Так, в "Гимне Ардва-Суре" дается довольно подробное перечисление тех людей, которые не должны к ней обращаться, ибо это бесполезно:

Не должен возлиянья
Мне совершать увечный,
Горячечный, побитый,
Ни хворый, ни больной,
Ни женщина, ни верящий,
Но не поющий Гат,
А также прокаженный,
Чья выброшена плоть.
Не прикоснусь к тем жертвам,
Которые приносят
Глухие и слепые,
Калеки и слепцы...
...Припадочные - все
Отмеченные знаком
Заметным слабоумья.
Пусть жертв мне не приносят
Ни тот, кто горб имеет
Иль спереди, иль сзади,
Ни карлик без зубов.
[1,с.43]

Напомним, что отрицательное отношение ко всем физически, умственно или морально ущербным людям определялось поверьем, что все они помечены Анхра-Маньей. Тем самым они не входят в множество "своих", т.е. зороастрийцев, поэтому их мольбы и отвергаются. Зороастризм в этом отношении далеко не уникален, во многих древних религиях боги предъявляют серьезные требования как к жертвенным животным, так и к жрецам, совершающим моления и жертвоприношения: и те, и другие должны быть лишены физических недостатков.

В некоторых случаях, требования, предъявляемые конкретным ахуром к людям, являющимися "подходящими" для него коммуникаторами, специфичны и связаны с основными функциями данного ахура. Пусть Z(a*) будет тогда обозначать множество всех людей (зороастрийцев), являющихся "подходящими" коммуникаторами для ахура a*:

13)Для всякого Kr^o Z(a*) Рез.[Kr^o(t,p,q)/c-m I- V(a*) -I a* (t,p':pRp',q')/c'-m'] = m(позитивный эффект)

Нулевой эффект мы определяем как ситуацию, когда Kr не получает просимого. В "Гимне Ардва-Суре" имеется несколько фрагментов, где описывается, как молящиеся ей произносят одинаковые молитвы, совершают одинаковые жертвоприношения, но одним она дает просимое, а другим - нет. И результат определяется личностью коммуникатора и целями коммуникации. Ардви-Сура помогает благочестивым зороастрийцам, просящим об удаче, которая приведет к победе над дэвами, колдунами, врагами-незороастрийцами и т.п.. Но моления "плохих" коммуникаторов с вредными для зороастрийцев целями, она оставляет без ответа:

И приносил ей жертву
Трехглавый Змей-Дахака
В стране,чье имя Баври,
Сто жеребцов,и тысячу
Коров,и мириад овец.
Вот так просил он Ардви:
"Такую дай удачу,
Благая Ардви-Сура,
Чтоб я все семь каршваров
Оставил без людей."
Но не дала такую
Удачу Ардви-Сура [1,с.31-32]

Сравним этот фрагмент со следующим:

И приносил ей жертву
Наследник рода Атвьи,
Трайтаона могучий
В четырехуглой Варне
Сто жеребцов,и тысячу
Коров,и мириад овец.
Вот так просил он Ардви:
"Такую дай удачу,
Благая Ардва-Сура,
Чтоб одолел я Змея
Трехглавого Дахаку
Коварный, криводушный,
Исчадье дэвов, злой,
Могущественный, сильный,
Он сделан Анхра-Маньей
Сильнейшим быть во Лжи,
На гибель всему миру,
Всех праведных существ.
Дала ему такую,
Удачу Ардви-Сура,
Всегда тому, кто верно
Свершает возлиянья,

Трехпастный, шестиглазый, *Дающая удачу.* [1,с.32-33]

Рассматривая эти фрагменты, мы видим, что последние три строчки могут рассматриваться как описание истинного положения дел только в определенном контексте использования, где под теми "кто верно совершает возлиянья" имеются в виду "свои", т.е. сторонники Добра. Значит, здесь имеет место неточность либо в оригинале, либо в переводе. Мы лично склоняемся к последнему, так как в переводе И.Брагинского соответствующие строчки переведены как:

И даровала ему эту удачу
Ардвисура Анахита,
Которая всегда дарует удачу просящему,
Заотру в дар приносящему,
Благочестиво жертвующему.

Как мы видим, здесь явно подчеркивается, что для получения от Ардви-Суры удачи, кроме правильного совершения жертвоприношения, требуется еще благочестивый характер жертвования, на который не способны дэвы и их союзники.

Возможность негативного эффекта для коммуникатора отмечается в "Гимне Митре". Причиной негативного эффекта являются, по-видимому, ошибки при продуцировании Слова и Дела, причем интересно, что описана ситуация, в которой имеется непосредственный и опосредованный Кг, и наказывается не жрец, совершающий ошибки, а "заказчик":

Пусть будет горе мужу,...
...О коем жрец неправедный,
Неопытный, незнающий
Помолится, взяв барсман [1,с.112]

В [1] зафиксирована еще одна разновидность негативного эффекта, проявляющегося при обращении к ряду ахуров неподходящих коммуникаторов, причем, что самое любопытное, он имеет место не для самих неподходящих коммуникаторов, а для истинных зороастрийцев. Так, например, в "Гимне Вэртрагне" постоянно повторяется мысль:

Когда приносит жертвы
Негодник или шлюха,
Убийца или верящий,
Но не поющий Гат,
Противник этой веры
Ахуры с Заратуштрой,-
То отстранит спасенье
Придут войска набегом,
Тогда в арийцев страны
Придут войска врагов
И сто сразят арийцев
На пятьдесят ударов,
На сто ударов - тыщу,
На тыщу - мириад,

Божественный Вэртрагна. На мириад - без счета.
Тогда в арийцев страны [1,с.130]

Данную ситуацию можно описать следующим образом:

14a) Для всякого s Рез.[$s \in D \cup Z(t,p,q)/c_2-m_2$ I-V(Вэртрагна)-I Вэртрагна $(t,p':pRp',q')/c'-m']=0$ (нулевой эффект)

14b) Для всякого $z \in Z$ Рез.[$s \in D \cup Z(t,p,q)/c_2-m_2$ I-V(Вэртрагна)-I Вэртрагна $(t,p':pRp',q')/c'-m']$ = негативный эффект)

Следовательно, получается, что молиться и совершать жертвоприношения ахурам является бесполезным лично для дэвов и тех людей, которые не входят в Z(a*), но для всей партии сил Зла оказывается выгодным обращаться к ряду ахуров (Тиштрии, Вэртрагне, Митре), ибо тем самым можно нанести вред всем зороастрийцам, т.е. сторонникам Добра. Вывод достаточно обескураживающий, хотя и объясняющий, почему требуется хранить в тайне от всех посторонних Священные слова!

Выше мы разбирали вопрос о результатах КА для коммуникаторов, обратимся теперь к выяснению вопроса о результатах КА для коммуникантов. Как уже ранее говорилось, правильное произнесение благих слов в зороастрийской мифологической Вселенной увеличивает силы ахуров. Это четко описано в "Гимне Тиштрии", процитированном нами на с. 2. Но это имеет место только тогда, когда соответствующее моление совершает Kr, который есть ахур или же человек, являющийся "подходящим" для данного лигитимного коммуниканта, т.е.:

15)Для $a^*=Kt^o$ Рез.[$Kr^o \in \{Z(a^*) \cup A\}(t,p,q)/c_1,c_2-m_1,m_2$ I-V(a*)-I $a^*(t,p':pRp',q')/c'_1,c'_2-m'_1,m_2]=m_1$
(позитивный эффект)

Причем при правильном произнесении подходящим коммуникатором Священных слов и выполнении им необходимых сопутствующих действий (жертвоприношений), произнесение человеком таких слов дает ахуру такую же силу, которую он получает от произнесения этих же слов самим Ахура-Маздой.

Что же происходит, когда к ахурам обращаются неподходящие коммуникаторы? По-видимому, этот вопрос интересовал и зороастрийцев еще в древности, потому что в "Гимне Ардва-Суре" Заратуштра спрашивает Ардва-Суру, что происходит с жертвоприношениями неподходящих коммуникаторов. И из ее ответа видно, что они просто не принимаются ею:

...эти возлиянья
Летят всегда за мною,
Которой нету там. [1,с.44]
Или в переводе И.Брагинского:
...Ужасные,паршой покрытые,язвой изрытые,
Мерзкие,-шестьсот и тысяча,-
Они за спиною моей
Заотры касаются [...],
И служат они лишь прославлению дэвов. [3,с.520]

Таким образом, каждый ахур при каждом обращении к нему, совершает выбор: принимать или не принимать данные дары. Это связано с тем, что в ираноарийской культуре (как и во всей индоевропейской) важное место занимает принцип "потлатч", сформулированный Марселем Моссом: это принцип взаимного обмена услугами, при котором "дать" и "брать" сливаются воедино, т.е. если кто-то принимает дар, то он обязательно отдаривает дарителя (насколько тесной была эта взаимосвязь, видно, например, из лексики индоевропейских языков, где глаголы "дать" и "брать" часто образуются из одного корня. См.[5].

Это требует от нас прежде всего пересмотра самого понятия SKA, он есть теперь не просто передача информации, но передача даров. Имеем ли мы основания для такого расширения понятия SKA? Можно ли считать коммуникативным актом передачу одним субъектом другому какой-либо вещи вообще без передачи информации? Чтобы не углубляться сейчас в эту проблему, введем номинальные определения:

Df.1: Коммуникативным актом дарения (KAP) мы будем называть любую процедуру дарения чего бы то ни было, осуществляемую между любыми субъектами.

Df.2: Сакральным коммуникативным актом дарения (SKAP) мы будем называть любой KAP, происходящий между человеком и божеством или между божествами, а так же между людьми, когда объектом дарения является сакральный объект.

Введем новые знаки для дарения "II-" и принятия дарения "-II". Тогда KAP в общем случае примет вид:

16)Kr II- W -II Kt, где W - это дар любого рода.

В системе потлатч принятие дара, как отмечено выше, обязательно сопровождается отдариванием, т.е.

17) [s* II- W -II a*]   [a* II- W' -II s*]

Или, если речь идет о позитивном эффекте и для Kr, и для Kt, то:

18) [Рез. для a* [s*(t,p,q/c_1,c_2-m_1,m_2) II- W
-II a* (t,p':pRp',q'/c'_1,c'_2-m_1,m_2)]= m_1]
[Рез. для s* [a* II- m_2 -II s*]= m_2]

Предметом дарения могут быть различные объекты, в частности, в связи с учением о Мысли, Слове и Деле в зороастризме, мы будем различать дарение Мысли, дарение Слова и дарение Дела (жертвоприношение).

19a) Kr II- T -II Kt, где T - мысль

19b) Kr II- V -II Kt, где V - текст

19c) Kr II- Q -II Kt, где Q - дело (жертвоприношение)

Отметим, что для SKAP продуцирование мысли и слова оказывается частным случаем дарения.

Особую значимость в культурах типа потлатч отношение дарения получает тогда, когда предметом дарения являются слова, точнее - не сами слова, а то, что они дают - славу, почитание, бессмертие в народной памяти (для земных героев) и т.п. Отсюда, весьма весомыми становятся отношения между поэтами и теми, кому посвящены восхваляющие стихи, и в том числе, между поэтами и богами.

Но и в том случае, когда субъект не сам нечто сочиняет, а только повторяет кем-то ранее сочиненное восхваление богов, тем более, если это восхваление приобрело уже статус Священных слов, его произнесение их есть дар богам - такой же, как и его жертвоприношение. Следовательно, принятие восхвалений и жертвоприношений есть обязательство отдарить, т.е. выполнить просьбу молящегося. От того-то, не желая выполнять просьбы дэвов и их союзников, ахуры и отвергают их дары. Таким образом, причиной нулевого эффекта для коммуникатора и для коммуниканта является то, что собственно SKAP не происходит, так как коммуникант не принимает "подарок":

20) Kr II- W -II a*

Благодаря хорошо разработанному в зороастризме учению о соотношении Мысли, Слова и Дела, мы можем несколько подробнее рассмотреть вопрос об их дарении в SKAP. Так как Ахура-Мазда есть воплощение света (а Анхра-Манья - тьмы), то довольно естественно Благие Мысли, Слова и Дела соотносятся с небесными источниками света: звезды с их довольно слабым светом - это сфера Благой Мысли (она ближе остальных к Земле), Луна - Благого Слова и Солнце - это сфера Благого Дела (дальше остальных от Земли). Интенсивность света (или тьмы) коррелирует с силой магического воздействия (увеличения сил ахуров или дэвов). Отсюда мы можем сравнить результат SKAD для ахура при принятии им в дар Мысли, Слова и Дела через соответствующие коффициэнты k и n, приложенные к j, которое будет пониматься как увеличение сил ахура от принятие Благой мысли, т.е. j есть минимальный результат SKAD:

20a) Рез. для a* [Kr II- T -II a*] = j

20b) Рез. для a* [Kr II- V -II a*] = k + j

20c) Рез. для a* [Kr II- Q -II a*] = n + k + j

Заканчивая с вопросом о результатах КА, хотим отметить еще его связь с пространственно-временными параметрами. Сакральные пространство и время не являются однородными и одинаковыми на всем своем протяжении. Так, в зороастрийском календаре выделяются месяцы, а внутри месяцев еще и дни, посвященные различным ахурам, и моления считаются особенно эффективными, когда производятся в месяц и/или день, посвященный данному ахуру - t(a*). Аналогично, считается, что существуют особые места (в поздний период - это зороастрийские храмы), благоприятные для молений - p(a*). Таким образом, коммуникативный акт с позитивным эффектом для "подходящего" коммуникатора и легитимного коммуниканта примет вид:

21) $Kr^o \in \{Z(a^*) \cup A\}$ $(t(a^*),p(a^*),q)/c_1,c_2\text{-}m_1,m_2$ I-
V(a*) -I a* $(t(a^*),p'\ p(a^*)Rp',q)/c'_1,c'_2\text{-}m'_1,m'$

И результат КА для a* есть m_1 и для Kr есть m_2, т.е. каждый из участников КА получает то, ради чего он участвовал в коммуникативном акте.

Литература

1. Авеста: Избранные гимны; Из Видевдата / Пер.с авест. И.Стеблин-Каменского.-М.,1992
2. *Бойс М.* Зороастрийцы: Верования и обычаи.-М.,1988
3. Гимн Ардвисуре Анахите / Поэзия и проза Древнего Востока.-М.,1973
4. *Гриненко Г.В.* Магия и логика истинных имен / Истина и истинность в культуре и языке.-М.,1995
5. *Уоткинс К.* Аспекты индоевропейской поэтики / Новое в зарубежной лингвистике.Вып.XXI.-М.,1988

А.М.Анисов

Тезис Джемса и логика

В одной из своих работ У.Джемс коснулся следующей проблемы. *Является ли объект чем-то бо́льшим, чем простой совокупностью свойств?* Как это часто бывает в философии, разные мыслители давали взаимоисключающие ответы на поставленный вопрос. Например, Э.Кассирер не сомневался в положительном решении проблемы: "Ведь объект это нечто бо́льшее, чем простая *сумма* свойств; он означает *единство* свойств, а, значит, и их взаимную обусловленность и зависимость."[1] Со своей стороны, У.Джемс был уверен в обратном.

"Всякий человек пользуется старинным различением между субстанцией и атрибутом, данным уже в самом строении языка, в грамматической разнице между подлежащим и сказуемым. Перед нами лежит кусок мелка. Его модусами, акциденциями, свойствами, качествами — или как там это ни назвать — являются белизна, хрупкость, цилиндрическая форма, нерастворимость в воде и т.д. Но носителем всех этих атрибутов является некоторое количество *мела*, называемого поэтому субстанцией... Точно также атрибуты этой кафедры содержатся в субстанции "дерево"... и так далее"[2].

"Однако очень скоро было замечено, что все, что *мы знаем* о меле, это его белизна, хрупкость и пр., — все, что мы знаем о дереве — это его горючесть и волокнистое строение. Всякая субстанция известна нам лишь как некоторый комплекс атрибутов, которые и составляют ее единственную наличную стоимость для нашего фактического опыта. В каждом отдельном случае субстанция раскрывается нам в своих атрибутах; если бы у нас отняли знание *их*, мы бы никогда даже и не догадались о существовании субстанции; точно так же если бы Бог оставил нам в неизменном порядке эти атрибуты, чудесно уничтожив в известный момент поддерживающую их субстанцию, то мы да-

---

[1] *Кассирер Э* Познание и действительность (Понятие о субстанции и понятие о функции). СПб., 1912. С.248.

[2] *Джемс У.* Прагматизм. СПб., 1910. С.56

же и не заметили бы этого, так как в нашем опыте ничего решительно бы не изменилось."[3]

Доводы У.Джемса выглядят убедительно, тогда как аргумент Э.Кассирера бьет мимо цели. Никто не будет спорить с тем, что от наличия одних свойств может зависеть наличие других. Например, свойство "металлический" обуславливает свойство "электропроводный". Может быть, Кассирер имел в виду, что наличие некоторого свойства P у одного объекта может повлечь наличие еще свойства Q, а у другого объекта наличие P к появлению Q не приведет? Скажем, если некоторый объект разумен, то вывод о его смертности следует лишь в том случае, если этот объект – человек. Если же он бог, то вывод неверен, ибо, как известно, боги бессмертны. Однако в действительности речь снова идет о свойствах. Надо выделить среди объектов универсума подкласс объектов, у которых P влечет Q, а это и означает введение соответствующего свойства. В нашем примере получим $\forall x$(Человек(x) $\rightarrow$ Смертен(x)). Даже если нет богов, но есть единственный Бог, синглетон {Бог}будет представлять из себя свойство: $\forall x$(Бог(x) $\rightarrow$ Бессмертен(x)).

Обратимся теперь к рассуждениям Джемса. Главное в них – вывод о том, что *объект – это совокупность атрибутов*. Назовем этот вывод *тезисом Джемса*. С логической точки зрения получается, например, что мел – это множество предикатов $\mathfrak{m}$, элементами которого будут такие свойства, как белизна, хрупкость, цилиндрическая форма, нерастворимость в воде и т.д., но при этом данное множество $\mathfrak{m}$ не содержит ни одного предиката, мелу не присущего (скажем, горючесть). Если каждый объект – это множество предикатов и q – объект, то для всякого предиката P утверждение P(q) истинно тогда и только тогда, когда $P \in q$ (именно так, а не в ставшем привычном виде $q \in P$).

Правда, тут возникает вопрос: "А что такое предикат P"? Если мы скажем, что это некоторое множество объектов (содержащее, между прочим, и q), то налицо круг в определении. Выход найти нетрудно. Подобно тому, как *объектная (субстанциальная)* точка зрения *постулирует* изначальное существование объектов, а затем *определяет* предикаты как множества объектов, *безобъектная или предикатная (атрибутивная) онтология* постулирует существование свойств и отношений, а

[3] *Джемс У.* Прагматизм. СПб., С.57.

затем определяет объекты как совокупности свойств и отношений. При первом подходе объекты – носители атрибутов – уподобляются вешалкам, на которых висят предикаты. Второй подход рассматривает объекты как комплексы атрибутов: вначале имеются предикаты, объекты появляются потом. С чего-то все равно надо начинать, поэтому неизбежно исходный пункт оказывается несводимым к чему-либо иному.

На самом деле, как будет видно из дальнейшего, все не так просто. В примерах У.Джемса фигурируют именно свойства, то есть одноместные отношения. Для свойств выражение $P(q) \Leftrightarrow P \in q$ имеет прозрачный смысл. А как быть в том случае, если речь должна идти об отношениях между двумя, тремя и т.д. объектами? Джемс, по-видимому, вообще не заметил этого вопроса. Но в нем и заключается суть проблемы. Факт, что Джемс был моложе Пирса. Значит, предикат "моложе" присущ Джемсу. Однако он был старше Дьюи, и это тоже факт. А быть старше – значит не быть моложе. Так надо или нет включать отношение "моложе" в совокупность предикатов такого объекта, как Джемс? Напрашивается решение включить в данный объект не отношение, а свойство "моложе Пирса", исключив из него свойство "моложе Дьюи". Но это не годится, поскольку предварительно требуется определить, из каких предикатов состоят объекты Пирс и Дьюи, и тут выяснится, что в первый должно войти свойство "старше Джемса", а во второй – "моложе Джемса". Круг замкнулся. Тем не менее, выход из тупика существует.

Построим фрагмент безобъектной (в том смысле, что *объекты не являются первичными сущностями*) онтологии.

Пусть дан бесконечный перечень одноместных предикатов $P^1_1, P^1_2, \ldots, P^1_n, \ldots$; бесконечный перечень двухместных предикатов $P^2_1, P^2_2, \ldots, P^2_n, \ldots$; и вообще для каждого натурального $m>0$ имеем ряд $P^m_1, P^m_2, \ldots, P^m_n, \ldots$. Это общая конструкция; в каждом конкретном случае можно ограничиться каким-то подмножеством (быть может, конечным) предикатов из этого перечня (который в дальнейшем придется модифицировать), выступающим в качестве *универсума*. Существенно, однако, чтобы универсум предикатов U был непуст. В противном случае просто не о чем говорить.

Как мы видели, проще всего определить *объект* на свойствах — это произвольная (возможно, *пустая*) совокупность одноместных предикатов из универсума U. На время предположим (пока не перейдем к общей ситуации), что U содержит только одноместные предикаты. Будем говорить, что объект q *обладает свойством* P, если $P \in q$. Это на уровне семантики. На синтаксическом уровне сохраним привычную "объектно-субстанциальную" форму записи: $P(q)$ и $\exists x P(x)$. В случае, если $P \notin q$, естественно, $\neg P(q)$ и $\neg\exists x P(x)$.

А если допустить существование *пустого* объекта v? Тогда не существует базисного (входящего в универсум U) свойства, которым этот объект обладает. Следовательно, для любого свойства P^1_n из U имеет место $P^1_n \notin v$ и будут истинными утверждения $\neg P^1_n(v)$. Например, круглый квадрат не является ни круглым, ни квадратным — вообще никакие конкретные (базисные) свойства ему не присущи. Наличие пустого объекта заставляет принять формулы вида $\exists x \neg P^1_n(x)$.

Двойственным образом, возникает понятие *универсального* объекта w такого, что для любого свойства P^1_n имеет место $P^1_n \in w$ и будут истинными утверждения $P^1_n(w)$ и $\exists x P^1_n(x)$.

Однако совсем не обязательно вводить в рассмотрение пустой и универсальный объекты, тем более что нельзя определить их в стандартном языке исчисления предикатов первого порядка конечным набором аксиом, если универсум предикатов бесконечен. Ведь квантификация по-прежнему осуществляется по объектам, а не по предикатам.

Настала пора обобщить безобъектный подход на случай предикатов произвольной местности. В стандартной объектной онтологии собственно отношения (предикаты, имеющие местность больше или равной двум) в отличие от свойств (одноместных предикатов) не задаются как совокупности объектов. Приходится вводить промежуточную категорию *упорядоченной* n-*ки объектов*, и лишь затем определять n-местный предикат как совокупность упорядоченных n-ок объектов. Аналогичным образом, в безобъектной онтологии приходится учитывать дополнительные характеристики отношений.

Во-первых, объекту присуще не некоторое отношение как таковое, а отношение с помеченным местом. Например, двухместное отношение $<$ ("меньше") не может просто так принадлежать объекту 0 ("ноль"). Входящее в рассматриваемый объект отношение принадлежит ему вместе с указанием *места*, которое в отношении способен занимать определяемый объект. Отношение $<$ имеет два места, указать которые можно при помощи помещения соответствующих верхних индексов слева от знака отношения: ${}^{1}{<}$ и ${}^{2}{<}$. Если теперь положить ${}^{1}{<} \in 0$, но ${}^{2}{<} \notin 0$, то можно заключить, что 0 — это такой объект, который занимает только первое место из двух в отношении $<$. Следовательно, при таком определении 0 будет меньше любого другого объекта q такого, что ${}^{2}{<} \in q$.

Объект 0 удалось определить потому, что в него входит, так сказать, только первая часть отношения $<$. А как быть в том случае, если и ${}^{1}{<}$, и ${}^{2}{<}$ принадлежат объекту? Например, пусть ${}^{1}{<} \in 5$ и ${}^{2}{<} \in 5$. Надо ли тогда считать, что $5<5$? Далее, если ${}^{1}{<} \in 4$ и ${}^{2}{<} \in 4$, то обязаны ли мы принимать как $4<5$, так и $5<4$? — Ведь объектам 4 и 5 принадлежат обе части отношения $<$ ("меньше")! Очевидно, что вырисовывается неудовлетворительная картина. Необходимо найти еще какую-то характеристику отношений, которая до сих пор ускользала от нас.

Итак, во-вторых, чтобы объекту могли быть присущи отношения, требуется еще одна дополнительная характеристика. Помимо места отношения, должна быть указана его *локализация*. Отношение входит в объект не глобально (это вело бы к неопределенностям, типа отмеченных выше), а локально, то есть частично и лишь в некотором аспекте. Локальность отношения с формальной точки зрения будет представлена индексом из произвольного множества индексов (совсем не обязательно упорядоченного каким-либо образом), который ставится слева от знака отношения под указателем места.

Вернемся к обсуждаемому примеру. Допустим, мы хотим, чтобы было $\neg(5<5)$, $(4<5)$ и $\neg(5<4)$. Положим $5=\{{}^{1}_{/}{<},\ {}^{2}_{/}{<}\}$ и

4={ ${}^{1}_{i}<$ }, причем первый индекс локализации неравен второму: $i \neq j$. Утверждение вида aRb, где R — символ двухместного отношения, будет *истинно*, если ${}^{1}_{i}R \in a$ и ${}^{2}_{i}R \in b$ для некоторого *индекса локализации i*; в противном случае утверждение aRb *ложно*. Иными словами, объекты a и b будут находится в отношении R, если объекту a принадлежит первое место отношения R, объекту b — второе, и при этом *индексы локализации* отношения R для a и b *совпадают*. Отсюда (5<5) ложно. Действительно, 5 может находиться на любом из мест отношения <, однако в нашем примере $i \neq j$, то есть индексы локализации не совпадают. Но (4<5) истинно, так как ${}^{1}_{j}< \in 4$ и ${}^{2}_{i}< \in 5$. В свою очередь, утверждение 5<4 ложно, поскольку, хотя индекс локализации совпадает, индексы *мест* (не путать с местностью!) отношения < не соответствуют расположению объектов 5 и 4.

Итак, чтобы построить безобъектную онтологию, мы должны для каждого предиката задать, вообще говоря, четыре характеристики: *местность* P^m, *номер* в перечне P_n, выделенное *место* ${}^{i}P$ и *индекс локализации* ${}_{j}P$. Следовательно, в общем случае исходный *универсум* атрибутов или предикатов U состоит из сущностей, которые можно представить символами вида ${}^{i}_{j}P^{m}_{n}$. Если каждый предикат из U обозначен уникальным символом (например, <, >, = и т.д.), то, разумеется, номера предикатов и их местность можно не указывать. Если рассматривается одноместное отношение, то есть если перед нами *свойство*, можно обойтись как без указания места, так и без указания индекса локализации; ничего удивительного в этом нет — ведь известно, что логика свойств гораздо проще логики отношений (так, первая разрешима, а вторая неразрешима).

После того, как универсум U задан, необходимо определить хотя бы один объект, построенный из предикатов универсума (впрочем, объект может быть и пустым). На процесс построения объектов не накладывается никаких ограничений; каждый объект может создаваться независимо от остальных. Другой вопрос, что за мир при этом получится. Если мы хотим получить мир, отвечающий нашим целям или максимально похожий на мир действительный, то процесс построения уже не будет произвольным. Так, желая сохранить арифметику, мы не должны принимать определений объектов — *чисел*, — нарушающих арифметические законы. Например, мы можем, конечно, положить ${}^{1}_{,}<\in 5$, ${}^{2}_{,}<\in 4$, получив в результате утверждение $5<4$ как истину, однако надо отдавать себе отчет, что случае такого предиката $<$ речь уже не может идти о привычном отношении "меньше, чем" на натуральных числах. Мы вообще окажемся за рамками арифметики, если наши числа будут конечными объектами (ведь в поле стандартного отношения $<$ находятся все числа, а их бесконечно много) и т.д.

Описанные трудности легко ощутить, если попробовать задать какой-либо мир на основе безобъектной онтологии. Пусть это будет, например, все тот же мир неотрицательных целых чисел. Кстати говоря, в рассматриваемом контексте предыдущее предложение выглядит явно ориентированным на объектную онтологию. Лучше (хотя это не привычно) говорить о мире арифметических предикатов. Как строить такой мир, чтобы в результате получились неотрицательные целые числа со стандартными арифметическими свойствами?

Прежде всего, мы должны сказать, что такое *равенство* чисел. Здесь нет проблемы. Коль скоро такие объекты, как числа, определены, это будут теоретико-множественные совокупности, вопрос о равенстве которых решается обычным для теории множеств образом. Но как определить числа? В соответствии с принципами безобъектной онтологии, начинать следует с определения универсума атрибутов U. Известно, что базисными арифметическими операциями являются $'$ (следующий за), $+$ (сложение) и $\times$ (умножение). Выше обсуждались только предикаты, а не операции (функции). Однако каждая n-местная операция может быть представлена n+1-местным отношением, так что одноместная функция $'$ будет представлена двухместным отношением, двухместные операции $+$ и $\times$ представляются трехместными отношениями. В число исходных дескриптивных (нелогических) символов арифметического языка входит также индивидная константа 0 (нуль). Но в безобъектной структуре изначально нет никаких индивидов, поэтому объект

0 должен быть определен в терминах базисных отношений. Покажем, как в принципе это можно делать.

Но прежде требуется описать универсум U. Каждый базисный арифметический предикат P (один двухместный и два трехместных) будем представлять в виде ${}^{i}_{j}P$, где индекс i — это номер места (1,2 или 3), а j является элементом *бесконечного* множества индексов I. Обращаем внимание, что номера мест — это не числа нашей теории. Например, мы не собираемся их складывать или умножать. Можно было бы эти номера обозначить буквами a,b,c.

Ясно, что так как элементов (предикатов) в каждом числе бесконечно много, выписать их все один за другим не представляется возможным. Однако можно задавать *правила*, в соответствии с которыми элемент универсума заносится или не заносится в объект. Например, так как арифметические операции проводятся со всеми числами без ограничения с *однозначным* результатом, принимаются следующие правила:

$$\forall x \forall y \exists! z \exists! i\, (({}^{1}_{i}+) \in x \;\&\; ({}^{2}_{i}+) \in y \;\&\; ({}^{3}_{i}+) \in z),$$

$$\forall x \forall y \exists! z \exists! i\, (({}^{1}_{i}\times) \in x \;\&\; ({}^{2}_{i}\times) \in y \;\&\; ({}^{3}_{i}\times) \in z) \text{ и}$$

$$\forall x \exists! y \exists! i\, (({}^{1}_{i}{}') \in x \;\&\; ({}^{2}_{i}{}') \in y).$$

Если отказаться от требования единственности объекта (фиксируемого при помощи символа ! после квантора существования), то могли бы получить, скажем, $({}^{1}_{i}{}') \in q$, $({}^{2}_{i}{}') \in r$ и $({}^{2}_{i}{}') \in p$, где $r \neq p$, что нарушило бы однозначность операции $'$. Точно к таким же последствиям могла бы привести не единственность индекса локализации: при $({}^{1}_{i}{}') \in q$, $({}^{2}_{i}{}') \in r$ для индекса $j \neq i$ возможна ситуация $({}^{1}_{j}{}') \in q$ и $({}^{2}_{j}{}') \in p$ при $r \neq p$.

Одно из правил для нуля будет таким: $\forall x \forall\, i\, (({}^{1}_{i}+) \in x \;\&\; ({}^{2}_{i}+) \in 0 \rightarrow ({}^{3}_{i}+) \in x)$. Чтобы понять эту семантическую формулу, достаточно ее переинтерпретировать в привычных объектных терминах. Трехместное отношение + является с этой точки зрения множеством упорядоченных троек чисел. Среди них имеются тройки, у которых на втором месте стоит нуль. Это условие импликации. Тогда первый и третий члены тройки будут совпадать. Напомним, что, по определению, при совпадении индекса локализации и распределении всех мест, то есть из $({}^{1}_{i}+) \in q$, $({}^{2}_{i}+) \in 0$ и $({}^{3}_{i}+) \in q$ следует, что утверждение $+(q,0,q)$ *истинно* (или, в функциональной записи, $q+0=q$).

Еще одно правило для нуля касается трехместного отношения $\times$: $\forall x \forall\ i\ (({}^{1}_{i}\times) \in x\ \&\ ({}^{2}_{i}\times) \in 0 \rightarrow ({}^{3}_{i}\times) \in 0)$. Смысл его очевиден: для любого числа и любого индекса локализации (на самом деле, как и в предыдущем случае, в силу приведенных выше правил однозначности найдется единственный индекс, удовлетворяющий условию импликации) результат умножения числа на нуль будет нулем.

Наконец, примем правило $\forall x \forall\ i\ (({}^{1}_{i}{}') \in x \rightarrow ({}^{2}_{i}{}') \notin 0)$, то есть число, следующее за другим числом, не будет нулем.

Исчерпаны ли тем самым все случаи вхождения или не вхождения базисных предикатов в число 0? Нет, остаются не сформулированными правила, заменяющие сложение и умножение на нуль справа соответствующими операциями с нулем слева. Но эти правила нетрудно сформулировать по аналогии с предыдущими. Тем самым будут охвачены *все* случаи вступления нуля в базисные отношения $'$, $+$ и $\times$, и, тем самым, *все* составляющие его элементы-предикаты. Нуль, таким образом, определен в терминах безобъектной онтологии. С содержательной точки зрения каждый элемент нуля является предикатом, представляющим одну-единственную упорядоченную n-ку чисел, в которую входит нуль. Например, тройка чисел <8, 0, 0> в объектной онтологии входит как элемент в трехместное отношение $\times$. В построенной безобъектной онтологии этой же тройке соответствует некоторый предикат ${}_{i}\times$ с однозначно определенным индексом локализации i: скажем, тройке <9, 0, 0> будет соответствовать какой-то другой предикат ${}_{j}\times$, где $i \neq j$. Используя запись ${}^{1}_{i}\times$, я указываю именно на число 8 — первое число в тройке с индексом i, а записывая ${}^{1}_{j}\times$, обозначаю число 9. Но при этом мы рассматриваем и сопоставляем две онтологии одновременно. В самих записях ${}_{j}\times$, ${}^{1}_{i}\times$ и т.п. как таковых нет никаких указаний на числа как индивиды. Ведь $\times$ — знак умножения, но что́ на что́ умножается, в этих обозначениях не указывается. Напротив, индивиды определяются через постулирование их способностей вступать или не вступать в определенные отношения, стоять или не стоять в определенных местах этих отношений. Нуль — это такой индивид, который содержит в себе третье место отношения умножения всякий раз, когда он содержит первое или второе место этого же отношения. Но место отношения — это не индивид объектной онтологии, а характеристика предиката — базисной сущности безобъектной онтологии. Действительно, одно дело сказать, что нуль появляется на тех или иных местах отношений, существуя (в логическом плане) *до* их определения, и другое дело сказать, что нуль — это и есть совокупность определенных мест базисных отношений, начинающая существовать *после* того, как эти характеристики отношений заданы.

Но насколько существенно различие между объектной и безобъектной онтологиями? Рассмотрим таблицу, в которой параллельно представлены обе эти онтологии.

Объектная онтология	**Безобъектная онтология**
U — непустой универсум индивидов	U′ — непустой универсум индексированных предикатов
Предикат $R^n \subset U^n$, где U^n — n-кратное декартово произведение U	Объект $q \subset U'$
$R(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ истинно $\Leftrightarrow$ $< a_1, a_2, \ldots, a_n > \in R^n$	$R(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ истинно $\Leftrightarrow$ $\exists\, i\, ({}^{k}_{i}R \in a_k)$ для всех k $1 \le k \le n$
$R(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ ложно $\Leftrightarrow$ $< a_1, a_2, \ldots, a_n > \notin R^n$	$R(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ ложно $\Leftrightarrow$ $\neg(\exists\, i\, ({}^{k}_{i}R \in a_k)$ для всех k $1 \le k \le n)$
$R(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ выполнено при оценке v $\Leftrightarrow$ $< v(x_1), v(x_2), \ldots, v(x_n) > \in R^n$	$R(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ выполнено при оценке v $\Leftrightarrow$ $\exists\, i\, ({}^{k}_{i}R \in v(x_k))$ для всех k $1 \le k \le n$
$R(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ не выполнено при оценке v $\Leftrightarrow$ $< v(x_1), v(x_2), \ldots, v(x_n) > \notin R^n$	$R(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ не выполнено при оценке v $\Leftrightarrow$ $\neg(\exists\, i\, ({}^{k}_{i}R \in v(x_k))$ для всех k $1 \le k \le n)$

Определения выполнимости и истинности для булевых связок стандартное	Определения выполнимости и истинности для булевых связок стандартное
∃xA(x) выполнено при оценке v ⇔ A(x) выполнено хотя бы для одной оценки v′	∃xA(x) выполнено при оценке v ⇔ A(x) выполнено хотя бы для одной оценки v′
∀xA(x) выполнено при оценке v ⇔ A(x) выполнено для каждой оценки v′	∀xA(x) выполнено при оценке v ⇔ A(x) выполнено для каждой оценки v′
Формула A (не) выполнена при всех оценках v ⇒ A (ложна) истинна	Формула A (не) выполнена при всех оценках v ⇒ A (ложна) истинна
Формула A логически истинна (ложна) ⇔ A истинна (ложна) в любом непустом универсуме при любых интерпретациях ее предикатов	Формула A логически истинна (ложна) ⇔ A истинна (ложна) в любом непустом универсуме при любых интерпретациях ее предикатов

Из таблицы видно, что различия простираются только до определений выполнимости и истинности атомарных формул включительно. После этого все определения совпадают.

Покажем теперь, как объектную интерпретацию атомарных формул перестраивать в безобъектную и наоборот. Превратить объектную онтологию в безобъектную легко: достаточно каждой n-ке индивидов $\langle a_1, a_2, ..., a_n\rangle \in R$ (так как ясно, что R n-местный предикат, верхний правый индекс опущен) сопоставить один и только один индекс локализации i, а затем для каждого k $1 \le k \le n$ положить ${}^{k}_{i}R \in U'$ и ${}^{k}_{i}R \in a'_k$. В результате будет образован безобъектный универсум U′ и каждому индивиду из объектного универсума $a_k \in U$ будет сопоставлено подмножество $a'_k \subset U'$, являющееся индивидом, определенным через комплекс атрибутов. В силу такого построения $\langle a_1, a_2, ..., a_n\rangle \in R \Leftrightarrow \exists!\, i\ ({}^{k}_{i}R \in a'_k)$ для всех k $1 \le k \le n$.

Согласно данному выше определению это означает, что как истинные, так и ложные атомарные формулы в объектной и безобъектной онтологиях одни и те же. Совпадают в этих онтологиях и классы выполнимых и не выполнимых атомарных формул. Но это все, что нужно для того, чтобы в них совпали множества *всех* истинных, ложных, выполнимых и невыполнимых формул соответственно. Таким образом, любая объектная структура M некоторого первопорядкового языка L преобразуется в *элементарно эквивалентную* безобъектную структуру M′ того же самого языка L.

Пусть теперь дана безобъектная структура M′ языка L, имеющая универсум U′. Возьмем предикат $R(a_1, a_2, ..., a_n)$. Возможны два случая. Во-первых, $R(a_1, a_2, ..., a_n)$ истинно в M′. Положим $a_1 \in U$, $a_2 \in U$, ..., $a_n \in U$ и $<a_1, a_2, ..., a_n> \in R$. Во-вторых, $R(a_1, a_2, ..., a_n)$ ложно в M′. Положим $a_1 \in U$, $a_2 \in U$, ..., $a_n \in U$ и $<a_1, a_2, ..., a_n> \notin R$. В результате получим обычную (объектную) структуру M языка L.

Вновь получается, что как истинные, так и ложные атомарные формулы в объектной и безобъектной онтологиях одни и те же. Совпадают в этих онтологиях и классы выполнимых и не выполнимых атомарных формул. Но это все, что нужно для того, чтобы в них совпали множества *всех* истинных, ложных, выполнимых и невыполнимых формул соответственно. Таким образом, любая безобъектная структура M′ некоторого первопорядкового языка L преобразуется в *элементарно эквивалентную* объектную структуру M того же самого языка L.

Объединяя вместе оба только что установленных факта, получаем следующее утверждение.

Теорема. Для любой объектной (безобъектной) структуры M (M’) для языка L существует элементарно эквивалентная ей безобъектная (объектная) структура M’ (M) для L, каков бы ни был первопорядковый язык L.

Итак, с точки зрения обеспечения элементарной эквивалентности *безразлично*, какую – объектную (субстанциальную) или безобъектную (атрибутивную) – онтологию принимать.

В.Л.Васюков

О феноменологической силлогистике*

Согласно Е. Слупецкому в [Słupecki 1984, p.85] мы можем определить в рамках Онтологии Лесьневского все термы аристотелевской силлогистики с помощью следующих определений:

D1. $SaP \equiv \forall x(x \varepsilon S \rightarrow x \varepsilon P)$ D3. $SeP \equiv \forall x(x \varepsilon S \rightarrow \neg x \varepsilon P)$

D2. $SiP \equiv \exists x(x \varepsilon S \rightarrow x \varepsilon P)$ D4. $SoP \equiv \exists x(x \varepsilon S \wedge \neg x \varepsilon P)$

Как следствие, следующие выражения, являющиеся теоремами элементарной Онтологии, дают нам аксиомы системы силлогистике, в том виде, как они были сконструированы Я. Лукасевичем в [Лукасевич1959]:

A1. SaS A3. $MaP \wedge SaM \rightarrow SaP$

A2. SiS A4. $MaP \wedge MiS \rightarrow SiP$

Помимо этого мы имеем следующие законы взаимной определимости термов силлогистики, являющиеся теоремами Онтологии:

(a) $SeP \equiv \neg SiP$

(b) $SoP \equiv \neg SaP$

Следует иметь в виду, что несмотря на то, что некоторые теоремы системы Лукасевича оказываются ложными высказываниями при подстановке пустых имен вместо их переменных (как, например, A2), это ограничение не имеет места в системе Лесьневского. Для того чтобы устранить подобное различие, Лесьневский использует также иное определение общеутвердительного высказывания силлогистики, которое выглядит следующим образом:

D1'. $Sa^*P \equiv \exists x(x \varepsilon S) \wedge \forall x(x \varepsilon S \rightarrow x \varepsilon P)$

Согласно этому определению общеутвердительное высказывание ложно, если его субъект есть пустое имя, ибо тогда ложно высказывание $\exists x(x \varepsilon S)$. Е. Слупецкий в [Słupecki 1946] предложил систему аристотелевской силлогистики с термом 'a^*', основанную на иных, чем система Лукасевича, аксиомах..

* Работа выполнена при поддержке РГНФ, грант № 96-03-04631.

Примитивными термами упомянутой системы являются функторы 'a^*' и 'i'. Определения остальных функторов силлогистики остаются аналогичными соответствующим определениям системы Лукасевича.

(a') $Sa^*P \equiv \neg SiP$

(b') $SoP \equiv \neg Sa^*P$

Аксиомами системы являются следующие выражения:

A1'. $Sa^*P \rightarrow SiP$ A2'. $SiP \rightarrow PiS$

A3'. $Ma^*P \wedge Sa^*M \rightarrow Sa^*P$ A4'. $Ma^*P \wedge SiM \rightarrow SiP$

Правила этой системы совпадают с правилами системы Лукасевича. Данные системы очевидным образом покоятся на похожих допущениях. Все модусы силлогизмов, так же как все законы логического квадрата и законы обращения, являются теоремами описываемых систем, но вместе с тем выражения A1 и A2 не являются теоремами этих систем. Слупецкий в [Słupecki 1984, p.90] отсюда заключает, что невозможно включить все теоремы аристотелевской силлогистики в элементарную Онтологию, если. общеутвердительные высказывания имеют значения, отвечающие либо D1, либо D2. Но какое бы из двух значений мы не выбрали, все теоремы силлогистики, будучи пополненными антецедентами типа $\exists x(x \varepsilon S)$ либо конъюнкцией выражений этого типа, становятся теоремами элементарной Онтологии, например, для A3 соответствующее выражение будет

$\exists x(x \varepsilon M) \wedge \exists y(y \varepsilon P) \wedge \exists z(z \varepsilon S) \rightarrow (MaP \wedge SaM \rightarrow SaP)$

Последнее обстоятельство наиболее интересно, поскольку П. Саймонс в [Simons 1984] показывает, что, возможно, таким образом переформулировать Онтологию, что она будет основываться на двух примитивных высказываниях, использованных Ф. Брентано в его редукции традиционных категорических форм к высказываниям, утверждающим или отрицающим существование: выражению для существования и номинальной конъюнкции. Брентановский базис Онтологии по Саймонсу состоит из следующих трех собственных аксиом и правила введения новых номинальных и квазиноминальных выражений по определению [P. Simons 1984, p. 303] (где E является предикатной константой существования и ab читается как 'a и b'):

BA1. $Ea \equiv Eaa$ BA2. $Eabc \equiv Ea.bc$

BA3. $Eabc \equiv (Eca \wedge Ecb \wedge \forall d,e(Edc \wedge Eec \rightarrow Ede))$

Правило определений

Определение является эквивалентностью без свободных переменных формы

BR3. $EaX[...] \equiv \exists b(Eab \wedge \forall c,d(Ecb \wedge Edb \rightarrow Ecd) \wedge A(...))$

где X является именем определяемого квазиноминального выражения, когда, если это есть квазиноминальное выражение (т. е. не имя), скобки содержат переменные, отличные от a и b, каждая из которых связана (подразумеваемым) квантором, предшествующим всей формуле, каждая появляется лишь однажды в скобках после X, и все принадлежат категориям, уже доступным в процессе построении системы.

Аксиома BA3 эквивалентна формуле

$$Eab \equiv \exists x(x \varepsilon a \wedge x \varepsilon b)$$

которая является определением Eab в системе Онтологии, основанной на 'ε' как примитивной связке.

В рамках подобного брентановского базиса для Онтологии вышеупомянутая редукция Брентано традиционных категорических форм выглядит следующим образом определению [. Simons 1987, p. 33]:

Форма	Чтение	Брентано	Чтение
i	Некоторые *a* есть *ab*	*Eab*	*ab* существует
e	Ни один *a* не есть *ab*	*Nab*	*ab* не существует
o	Некоторые *a* не есть *ab*	$\mathcal{E}ab$	*a не-b* существует
a	Ни один *a* не есть *ab*	$\mathcal{N}ab$	*a не-b* не существует

где N есть сокращение для '$\neg E$' и, соответственно, $\mathcal{E}ab \equiv \exists x(Exa \wedge \forall d,e(Edx \wedge Eex \rightarrow Ede) \wedge \neg Exb)$. Брентановская редукция будет для нас иметь существенный интерес, поскольку мы намереваемся перейти от Онтологии к Формальной феноменологии и попытаться обнаружить, какие из систем силлогистики могут существовать в подобных новых рамках рассмотрения.

а) Гуссерлианская силлогистика

В работе [Vasyukov 1993] были введены некоторые расширения систем Онтологии Лесьневского в качестве инструментария для анализа теорий объектов Гуссерля и Мейнонга. Указанные лесьневскианские системы фактически относятся не к области формальной онтологии, а к области формальной феноменологии, поскольку семантические конструкции для данных систем носят существенно феноменологический характер, позволяя говорить о 'феноменологичесом способе существования'.В частности, для анализа воззрений Гуссерля были предложены системы, чей список "ноэматических" аксиом и правил вывода, добавляемых к Онтологии Лесьневского, выглядит следующим образом:

A1. $x\varepsilon[a\supset b]\rightarrow(x\varepsilon[a]\rightarrow x\varepsilon[b]$ A2. $x\varepsilon[a]\rightarrow x\varepsilon\langle a\rangle$

A3. $x\varepsilon[a]\rightarrow x\varepsilon a$

R1. $\dfrac{x\varepsilon\ a\rightarrow x\varepsilon\ b}{x\varepsilon\ [a]\rightarrow x\varepsilon\ [b]}$ R2. $\dfrac{x\varepsilon\ a}{x\varepsilon\ [a]}$

Для подобных гуссерлианских систем Формальной феноменологии способ получения феноменологической силлогистики очевиден. Если мы просто расширим систему аксиом Лукасевича на язык гуссерлианских систем, то это дает нам следующие дополнительные аксиомы:

A1.1. $[S]aS$ A2.1. $[S]iS$

A3.1. $MaP\wedge Sa[M]\rightarrow SaP$ A4.1. $Ma[P]\wedge MiS\rightarrow SiP$

Либо мы можем определить новые дополнительные термы силлогистики следующим образом:

D1.1. $S[a]P\equiv\forall x(x\varepsilon[S]\rightarrow x\varepsilon P)$

D2.1. $S[i]P\equiv\exists x(x\varepsilon[S]\wedge x\varepsilon P)$

D3.1. $S[e]P\equiv\forall x(x\varepsilon[S]\rightarrow\neg x\varepsilon P)$

D4.1. $S[o]P\equiv\exists x(x\varepsilon[S]\wedge\neg x\varepsilon P)$

и тогда наш список аксиом пополнится за счет следующих новых аксиом:

A1.1.1. $S[a]S$ A2.1.1. $S[i]S$

A3.1.1. $MaP\wedge S[a]M\rightarrow S[a]P$ A4.1.1. $M[a]P\wedge M[i]S\rightarrow SiP$

Здесь $S[a]P$ читается как “каждый S интенционально есть P“, $S[i]P$ читается “некоторые S интенционально есть P“, $S[e]P$ читается “ни один S интенционально не есть P“, $S[o]P$ читается “некоторые S интенционально не есть P“. В соответствии с формально-феноменологической трактовкой функторов [-], <-> мы также можем ввести дуальные термины силлогистики с помощью дуальных феноменологических определений, например, $\langle a \rangle$ может быть переписано следующим образом:

D1. $S\langle a \rangle P \equiv \forall x(x \varepsilon S \rightarrow x \varepsilon \langle P \rangle)$

где $S\langle a \rangle P$ читается “все S ноэматически есть P“. Для подобного дуального термина аксиома A1.1.1 преобразуется следующим образом:

A1.1.2. $S\langle a \rangle S$

Остальное очевидно.

б) Мейнонгианская силлогистика

В мейнонгианских *(im)possibilia*-системах формальной феноменологии мы имеем дело не только с феноменологическими, но также и с модальными функторами, поэтому неудивительно, что мы получаем системы аристотелевской и гуссерлианской силлогистик в качестве компонент мейнонгианской силлогистики, подобно тому, как аристотелевская модальная (аподиктическая) силлогистика появляется в системах Модальной Онтологии Лебедевой в [Lebiediewa 1969]. Единственным новшеством оказываются смешанные системы, содержащие гуссерлианские функторы наряду с модальными.

Если мы введем модальные термины силлогистики с помощью следующих определений:

D1.2. $Aa^{\Box}P \equiv \Box(SaP) \equiv \forall x(x \varepsilon S \rightarrow x \varepsilon P)$

D2.2. $Si^{\Box}P \equiv \Box(SiP) \equiv \exists x(x \varepsilon S \wedge x \varepsilon P)$

D3.2. $Se^{\Box}P \equiv \Box(SeP) \equiv \forall x(x \varepsilon S \rightarrow \neg x \varepsilon P)$

D4.2. $So^{\Box}P \equiv \Box(SoP) \equiv \exists x(x \varepsilon S \wedge \neg x \varepsilon P)$

то дополнительные “смешанные” аксиомы будут выглядеть следующим образом:

A1.2. $[S]a\ S$ A2.2. $[S]i^{\Box}S$

A3.2. $Ma^{\cdot}P \wedge Sa^{\cdot}[M] \rightarrow SaP$ A4.2. $Ma^{\Box}[P] \wedge MiS \rightarrow SiP$

"Чистые" модально-феноменологические силлогистические термины мы можем ввести следующим образом:

D1.2.1. $S\ a\ P \equiv \Box\forall x(x\varepsilon\ [S] \rightarrow x\varepsilon\ P)$

D2.2.1. $S\ i\ P \equiv \exists x\Box(x\varepsilon\ [S] \wedge x\varepsilon\ P)$

D3.2.1. $S\ e\ P \equiv \forall x\Box(x\varepsilon\ [S] \rightarrow \neg x\varepsilon\ P)$

D4.2.1. $S\ o\ P \equiv \forall x\Box(x\varepsilon\ [S] \wedge \neg x\varepsilon\ P)$

что ведет к (*im*)*possibilia*-аксиомам

A1.2.1. $S\ a\ S$ 1.2.2. $S\ i\ S$

A3.2.1. $MaP \wedge S\ a\ M \rightarrow S\ a\ P$

A4.2.1. $M\ a\ P \wedge MiS \rightarrow SiP$

Здесь $S\ a\ P$ читается "все S необходимо-интенционально есть P" и т. д. Дуальные термины вводятся очевидным образом.

П. Саймонс замечает в [Simons 1987, p. 24], что Брентано не мог в то время знать, что он осуществил в точности те же редукции, которые были сформулированы почти теми же самыми словами Лейбницем двумя столетиями ранее, в статье, которая была впервые опубликована Кутюра в 1903 году [Leibniz 1966]. Все же, несмотря на изумительное сходство, лейбницевская интерпретация '*ab* est' не в точности та же, что у Брентано: для Лейбница это означает всего лишь, что *ab* возможно.

Поскольку брентановская редукция '*i*' к '*Eab*' в Модальной Онтологии Лебедевой [Lebiediewa 1969] преобразуется в $\Diamond Eab \equiv \exists x(x\varepsilon a \wedge x\varepsilon b)$, то мы можем сказать, что лейбницевская интерпретация гораздо ближе к силлогистики Модальной Онтологии и, следовательно, сходство брентановской и лейбницевской интерпретаций силлогистических терминов зависит от исчисления имен, принимаемого в качестве точки зрения.

Гораздо более сложную ситуацию мы имеем в случае мейнонгианских *Sosein*-систем формальной феноменологии, где как раз брентановская редукция представляется, по-видимому, наиболее пригодной для получения силлогистики. Система аксиом и определений, согласно [Vasyukov 1993, p. 68], выглядит в этом случае следующим образом:

DR1. $x\varepsilon 1 \equiv x\varepsilon x \wedge \forall y(y=x\otimes y)$

AR1. $x\varepsilon a\otimes(b+c)\equiv x\varepsilon(a\otimes b)+(a\otimes c)$

AR2. $(a\otimes b)+c=c\equiv a+(b\Rightarrow c)=b\Rightarrow c$

AR3. $x\varepsilon a\otimes b\equiv x\varepsilon b\otimes a$

AR4. $x\varepsilon a\otimes(b\otimes c)\equiv x\varepsilon(a\otimes b)\otimes c$

AR5. $a+a^2=a^2$

где $\otimes$ есть операция из моноида де Моргана, $\Rightarrow$ - алгебраическая интерпретация релевантной импликации и a^2 означает $a\otimes a$. Здесь мы имеем три возможности. Если мы просто намерены сосредоточиться на интерпретации *Sosein*-высказываний, то все что нам нужно - это модификация существования как простого существования, что приводит нас к следующим определениям *Sosein*-силлогистики:

D1.2.2. $S\underline{a}P\equiv\forall x,y(x\otimes y\varepsilon S\rightarrow x\otimes y\varepsilon P)$

D2.2.2. $S\underline{i}P\equiv\exists x,y(x\otimes y\varepsilon S\wedge x\otimes y\varepsilon P)$

D3.2.2. $S\underline{e}P\equiv\forall x,y(x\otimes y\varepsilon S\rightarrow\neg x\otimes y\varepsilon P)$

D4.2.2. $S\underline{o}P\equiv\exists x,y(x\otimes y\varepsilon S\wedge\neg x\otimes y\varepsilon P)$

Если же мы намерены уделить внимание *Nichtsosein*-аспектам, то система аксиом пополняется за счет следующих схем аксиом [Vasyukov 1993, p. 70]:

AR6. $x\varepsilon(a\Rightarrow b^*)\otimes b\rightarrow x\varepsilon a^*$

AR7. $x\varepsilon a^{**}\equiv x\varepsilon a$

AR8. $x\varepsilon(a\Rightarrow a^*)\rightarrow x\varepsilon a^*$

где есть алгебраический аналог релевантного отрицания, и мы должны воспользоваться брентановской редукцией, интерпретируя ее следующим образом:

$Eab\equiv\exists x(x\varepsilon a\otimes b)$ $\qquad$ $Nab\equiv\forall x(x\varepsilon(a\otimes b)^*)$

$Eab\equiv\exists x(x\varepsilon\ a\otimes b^*)$ $\qquad$ $Nab\equiv\forall x(x\varepsilon\ (a\otimes b^*)^*)$

Следуя реконструкции П. Саймонсом логики Брентано в [.Simons 1987], мы в этом случае также понимаем Ea как $\exists x(x\varepsilon a)$, Na (и Ea) как $\exists x(x\varepsilon a^*)$. Таким образом, наша силлогистика в стиле Брентано может рассматриваться как *Nichtsosein*-силлогистика, если иметь в виду предложенную в [Vasyukov 1993, p. 70]: интерпретацию *Nichtsosein*-высказываний как $a\varepsilon b^*$.

Наконец, если нам потребуется силлогистика, охватывающая как *Sosein*-, так и *Nichtsosein*-аспекты, то подразумеваемая интерпретация терминов силлогистики должна выглядеть следующим образом:

$$E_s ab \equiv \exists x,y(x \otimes y \varepsilon a \otimes b) \qquad N_s ab \equiv \forall x,y(x \otimes y \varepsilon (a \otimes b)^*)$$

$$E_s ab \equiv \exists x(x \otimes y \varepsilon\ a \otimes b^*)$$

$$N_s ab \equiv \forall x, y(x \otimes y \varepsilon\ (a \otimes b^*)^*)$$

Согласно нашей трактовке *Sosein* высказываний Мейнонга, мы получаем отсюда следующее чтение терминов силлогистики:

Форма	Чтение
$E_s ab$	*ab* есть сущее
$N_s ab$	*ab* не есть сущее
$E_s ab$	*a не-b* есть сущее
$N_s ab$	*a не-b* не есть сущее

Поскольку у нас в рамках мейнонгианской Формальной Феноменологии существует паранепротиворечивость [Vasyukov 1993, p. 70]:, то мы унаследуем ее и в нашей (*Nicht*)*Sosein*-силлогистике. Но при попытке формулировки мейнонгианской паранепротиворечивой силлогистики мы столкнемся с ее неноминалистским характером, который вызван принятием ослабленной версии базисной аксиомы Онтологии. Это приводит к определенной неразличимости наших объектов и отсюда из SaP мы можем заключить лишь только, что ‘каждый S (с точностью до тождественности) есть P (с точностью до тождественности)’, поскольку теперь тождественность не означает ‘быть тем же самым‘. Подобная неопределенность не единственная проблема, поскольку Nab теперь превращается в $\forall x(x\varepsilon\ ((a \circ b)'\circ(a \circ b)^{\circ})$, где $x\varepsilon\ a^{\circ} \equiv x\varepsilon\ (a \circ a')'$. Таким образом, мы в этом случае нуждаемся в более детальном анализе, выходящем за рамки данной статьи.

в) Антидиодорова силлогистика

В работе [Vasyukov 1993a] были предложены системы так называемой Антидиодоровой Динамической Феноменологии, призванной интерпретировать феноменологическую концепцию времени Брентано-Гуссерля с антидиодоровой точки зрения (название связано с направлением интерпретации: согласно Диодору Кроносу мы определяем модальные высказывания через временные, в нашем же случае - временные посредством модальных). Приведем систему аксиом и определений Антидиодоровой Динамической Феноменологии будущего из [Vasyukov 1993a, p. 386]:

P1. $x\varepsilon\ f_{\alpha}^{\beta}a \vee x\varepsilon\ f_{\alpha}^{\beta}b \rightarrow x\varepsilon\ f_{\alpha}^{\beta}(a+b)$

P2. $x\varepsilon\ f_{\delta}^{\gamma}\, f_{\alpha*}^{\beta}a \rightarrow x\varepsilon\ f_{\delta}^{\gamma\beta}a$

PR1. $\dfrac{x\varepsilon\ a}{x\varepsilon\ g_{\alpha}^{\beta}}$ PR2. $\dfrac{x\varepsilon\ a \leftrightarrow x\varepsilon\ b}{x\varepsilon\ f_{\alpha}^{\beta}a \leftrightarrow x\varepsilon\ f_{\alpha}^{\beta}b}$

D20. $x\varepsilon\ f_{\alpha}^{\beta}a =_{def} x\varepsilon\ [\alpha] < \beta > a$

D21. $x\varepsilon\ g_{\alpha}^{\beta}a =_{def} x\varepsilon < \beta > [\alpha]a$

где $[\alpha]a$ читается “интенциональный объект a после ретенции α“, $<\alpha>a$ читается “ноэма a после протенции α“.

В духе нашего предыдущего изложения мы получаем отсюда следующие определения силлогистических терминов:

D1. $Sa_f P \equiv \forall x(x\varepsilon\ f_{\delta}^{\gamma}\, f_{\alpha*}^{\beta}S \rightarrow x\varepsilon\ f_{\delta}^{\gamma\beta}P)$

D2. $Si_f P \equiv \exists x(x\varepsilon\ f_{\delta}^{\gamma}\, f_{\alpha*}^{\beta}S \wedge x\varepsilon\ f_{\delta}^{\gamma\beta}P)$

D3. $Se_f P \equiv \forall x(x\varepsilon\ f_{\delta}^{\gamma}\, f_{\alpha*}^{\beta}S \rightarrow \neg x\varepsilon\ f_{\delta}^{\gamma\beta}P)$

D4. $So_f P \equiv \exists x(x\varepsilon\ f_\delta^\gamma f_{\alpha\bullet}^\beta S \wedge \neg x\varepsilon\ f_\delta^{\gamma\beta} P)$

На первый взгляд мы сталкиваемся здесь с избыточностью подразумеваемых значений, но дело в том, что все они являются простыми следствиями принятия концепции времени Брентано-Гуссерля в рамках вышеприведенной системы Антидиодоровой Динамической Феноменологии будущего. Таким образом, прочтения терминов полностью определены комбинациями предыдущих значений соответствующих выражений. Для простоты, конечно, можно было бы Sa_fP читать "каждый будущий S есть будущий P".

г) Заключительные замечания

Можно было бы сделать три замечания. Во первых, на всех уровнях рассмотрения мы имели дело с постоянным возрождением аристотелевской силлогистики. Фактически менялись (усложнялись) лишь контексты (интерпретации, прочтения), в то время как формулировки оставались теми же самыми. Конечно, это не исчерпывает всего содержания вышеприведенного очерка. В процессе изложения можно было сделать также некоторые наблюдения относительно взаимодействия различных видов силлогистики. И в этой связи второе замечание является просто констатацией факта слишком краткого характера нашего рассмотрения. Можно надеяться, что дальнейшие исследования будут более плодотворными в части собственно феноменологической силлогистики.

Последнее замечание касается более глобальных аспектов Феноменологической Силлогистики как таковой. Была ли эта силлогистика глубоко укорененной в стиле мышления брентанистов? Применяли ли они ее спонтанно и, возможно, не отдавая себе в том отчета? Когда мы начинаем размышлять об этом, то становится очевидным, что лишь глубокое текстуальное исследование феноменологического наследия может пролить свет на обсуждаемую проблему.

Литература

[Ajdukiewicz 49/50] *K. Ajdukiewicz*, On the Notion of Existence, Studia Philosophica IV (1949/1950), p. 7-22.

[Iwanuś 1984] *B. Iwanuś*, On Leśniewski's Elementary Ontology, in: Leśniewski's Systems. Ontology and Mereology, J. T. J. Srzednicki, V. F. Rickey (eds.), The Hague, 1984, p. 162-215.

[Leibniz 1966] *G. W. Leibniz*, General inquires about the analysis of concepts and of truths, in: Logical Papers, tr. and ed. By G. H. R. Parkinson, Oxford, Ckarendon, 1966.[

[Лукасевич 1959] *Я. Лукасевич*, Аристотелевская силлогистика с точки зрения современной формальной логики, М., 1959

[Lebiediewa 1969] *S. Lebiediewa*, The Systems of modal calculus of Names. I., Studia Logica, 24 (1969), p. 83-107.

[Simons 1984] *P. Simons*, A Brentanian Basis for Leśniewskian Logic, Logique et Analyse, 107 (1984), p. 297-307.

[Simons 1987] *P. Simons*, Brentano's Reform of Logic. Topoi, 6 (1987), p. 25-38.

[Słupecki 1946] *J. Słupecki*, Uwagi o sylogistyce Arystotelesa, Annales Universitatis Mariae Skłodowska-Curie, vol 1, № 3 (1946), section F, Lublin, p. 187-191.

[Słupecki 1984] *J. Słupecki*, S. Leśniewski's Calculus of Names, in: Leśniewski's Systems. Ontology and Mereology, J. T. J. Srzednicki, V. F. Rickey (eds.), The Hague, 1984, p. 59-122.

[Vasyukov 1993] *V. L. Vasyukov*, A Leśniewskian Guide to Husserl's and Meinong's Jungle, Axiomates, № 1 (19930, p. 59-74.

[Vasyukov 1993a] *V. L. Vasyukov*, Antidiodorean Logics and Brentano-Husserl's Conception of Time, Axiomates, № 3 (1993), p.373-388.

А. С. Карпенко

Библиотечно-библиографическая классификация литературы по логике*

Ю4 ЛОГИКА

Под индексом Ю4 и его подразделениями собирается литература по формальной (традиционной и современной математической) логике. Математическая логика берется в объеме ее общелогического содержания и применения в науке и технике.

Основные деления

Ю40 Вводная литература
Ю41 История логики
Ю42 Логические формы и приемы познания
Ю43 Основы логики
Ю43a Классическая логика
Ю43b Логическая семантика
Ю43c Теория моделей
Ю43d Теория доказательств
Ю43e Основы теории вычислимости
Ю44 Неклассические логики
Ю45 Логика правдоподобных и аппроксимативных (приближенных) рассуждений
Ю46 Метатеоретические проблемы
Ю47 Основания математики
Ю48 Применения и приложения логики

---

* Доклад автора 21 сентября 1995 г. на научно-исследовательском семинаре сектора логики ИФ РАН. Автор благодарен также В. К. Финну за полезные замечания и В. А. Смирнову на финальной стадии работы.

Ю40 ВВОДНАЯ ЛИТЕРАТУРА

1 Общие работы (энциклопедии, справочники, библиографии, словари)
2 Учебники, учебные программы
3 Исследовательские работы (монографии, обзоры)
4 Конгрессы, конференции

Ю41 ИСТОРИЯ ЛОГИКИ

1 Китайская
2 Индийская
3 Буддистская
4 Античная
5 Арабская
6 Средневековая европейская
7 Логика нового времени
8 Современная логика
9 И другие

Ю42 ЛОГИЧЕСКИЕ ФОРМЫ И ПРИЕМЫ ПОЗНАНИЯ

1 Понятие
2 Определение
3 Суждение, высказывание
4 Основные принципы (законы) мышления
5 Абстракция и идеализация
6 Формализация
7 Аксиоматический метод
8 Классификация
9 Теория измерений

Ю43 ОСНОВЫ ЛОГИКИ:

Ю43а Классическая логика

1 Логика высказываний
1.1 Алгебра логики
2 Стандартная квантификация

3 Логика высших порядков
4 Обобщенные кванторы
5 Инфинитарные логики
6 Теория типов
7 Лямбда исчисление и комбинаторная логика
8 Эпсилон-исчисления и йота-исчисления

Ю43b Логическая семантика

1 Определение истины по Тарскому
2 Семантика возможных миров
3 Алгебраическая семантика
4 Категорная семантика
5 Частичная истинность (истинностно-значные провалы) и пресыщенные оценки
6 Теория семантических категорий

Ю43c Теория моделей

1 Теоретико-множественная теория моделей
2 Неклассические модели (булевозначные и т.д.)
3 Нестандартные модели
4 Категоричность и компактность

Ю43d Теория доказательств

1 Структура доказательств
2 Элиминация сечения и нормальные формы
3 Сложность доказательств
4 Автоматический поиск доказательств

Ю43e Основы теории вычислимости
(см. также Ю43a.7)

Ю44 НЕКЛАССИЧЕСКИЕ ЛОГИКИ (см. также Ю45)

1 Интуиционистская и конструктивная
2 Суперинтуиционистские (промежуточные)
3 Подсистемы классической логики (включая интуиционистскую): BCK, BCI и т. д.

5 Многозначные
6 Модальные
7 Доказуемостные
8 Временные
9 Комбинированная модальная и временная
10 Релевантные и следования
11 Контрфактуалы и кондиционалы
12 Паранепротиворечивые
13 Квантовые
14 Эпистемические
15 Деонтические
16 Императивные
17 Немотонные логики
18 Свободные логики
19 Логика вопросов (эротетическая логика)
20 Интенсиональные
21 Онтология Лесневского
22 Силлогистика
23 Другие логики

Ю45 ЛОГИКА ПРАВДОПОДОБНЫХ И АППРОКСИМАТИВНЫХ (ПРИБЛИЖЕННЫХ) РАССУЖДЕНИЙ

1 Вероятностная логика
2 Индуктивная логика
3 Логика подтверждений и порождения гипотез
4 Логика решений
5 Нечеткие (нечеткозначные) логики
6 Аналогия

Ю46 МЕТАТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ПРОБЛЕМЫ

(см. также Ю43с.4)

1 Непротиворечивость логических теорий
2 Полнота
3 Разрешимость (неразрешимость)
4 Независимость
5 Теория определимости

6 Классификация логических исчислений
7 Другие вопросы

Ю47 ОСНОВАНИЯ МАТЕМАТИКИ

1 Логицизм
2 Формализм (программа Гильберта)
3 Интуиционизм и конструктивизм
4 Аксиоматические теории множеств
5 Логические и семантические парадоксы

Ю48 ПРИЛОЖЕНИЯ И ПРИМЕНЕНИЯ ЛОГИКИ

1 Логика и онтология
2 Логика и теология
3 Логика и эпистемология
4 Логика и методология наук
5 Логика и психология
6 Логика и право
7 Логика и этика
8 Логический анализ естественного языка
9 Логика в компьютерных науках
9.1 Динамические логики
9.2 Логика программ
9.3 Логическое программирование
9.4 Экспертные системы
10 Другие применения

Научное издание

ТРУДЫ НАУЧНО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКОГО СЕМИНАРА ЛОГИЧЕСКОГО ЦЕНТРА ИНСТИТУТА ФИЛОСОФИИ РАН 1996

Утверждено к печати Ученым советом
Института философии РАН

В авторской редакции
Корректура авторская

Художник *В.К.Кузнецов*

Лицензия ЛР № 020831 от 12.10.93 г.

Подписано в печать с оригинал-макета 10.07.97 г.
Формат 60x84 1/16. Печать офсетная. Гарнитура Таймс.
Усл. печ. л. 12,81. Уч.-изд.л. 8,71. Тираж 500 экз. Заказ № 036

Оригинал-макет изготовлен в Институте философии РАН
Компьютерный набор авторов
Компьютерная верстка: *С.А.Павлов*

Отпечатано в ЦОП Института философии РАН
119842, Москва, Волхонка, 14.